Олимпиадные задачи - Листок 11

Задача 1

а) Найдите сумму углов произвольного треугольника

б) Найдитие сумму углов произвольного n-угольника

в) Самопересекающийся пятиугольник $ABCDE$ имеет форму пятиконечной звезды. Найдите сумму углов при "лучах"звезды.

Задача 2

а) Можно ли с сократить дробь $\frac{5n+6}{8n+7}$ при каком-нибудь целом n, и если можно, то на какое число?

б) Можно ли с сократить дробь $\frac{47n+2}{17n+1}$ при каком-нибудь целом n, и если можно, то на какое число?

Задача 3

Имеется три сосуда вместимостью в 8 литров, 5 литров и 3 литра. Восьмилитровый сосуд наполнен водой. Разлить её на две части по 4 литра.

Задача 4

Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ простое при любом натуральном n?

Задача 5

28 футбольных команд участвуют в чемпионате. Сколько игр нужно сыграть, чтобы каждая команда встретилась с другой ровно один раз?

Задача 6

а) На какую цифру оканчивается число 7^{1000} ?

б) На какую цифру оканчивается число $7^{7^{7^7}}$? (Такая запись предполагает следующий порядок возведения в степень $7^{(7^{(7^7)})}$).

Задача 7

Может ли произведение цифр целого положительного числа быть больше самого числа?

Задача 8

Денежный автомат устроен таким образом, что на каждую опущенную монету он выдаёт не меньше трёх монет (не сказано, какого достоинства). В результате пользования автоматом у человека оказалось 12 монет. Докажите, что он воспользовался автоматом не больше 5 раз.

Задача 9

В строке стоят 20 целых чисел. Известно, что сумма любых трёх чисел, стоящих последовательно, больше нуля. Можно ли утверждать, что сумма всех 20 чисел больше нуля?

Задача 10

В целом положительном числе переставили цифры и получили число, в три раза меньшее исходного. Докажите, что исходное число делилось на 27.