

Олимпиадные задачи - Листок 5

Задача 1

Можно ли прорезать в тетрадном листе бумаги дыру, в которую пролезет взрослый человек?

Задача 2

«Простым» числом называется число, которое делится только на себя и на единицу. Выпишите все простые числа, меньшие 100. Как вы думаете, существует ли самое большое простое число?

Задача 3

Али-Баба пытается проникнуть в пещеру с сокровищем. У входа в пещеру стоит барабан с четырьмя отверстиями по бокам. Около каждого отверстия внутри поставлен переключатель, имеющий два положения «вверх» и «вниз».

Разрешается засунуть руки в любые два отверстия, пощупать, как стоят переключатели и переключить их произвольным образом (в частности, можно не переключать).

После этого барабан вращается и после остановки нельзя установить, какие именно переключатели переключали в прошлый раз. Разрешается проделывать эту операцию до 10 раз. Дверь в пещеру открывается, когда все переключатели в одном положении. Как Али-Бабе попасть в пещеру?

Задача 4

У коровы 2, у ослика 2, у утки 3, у кошки и собаки 3, у кукушки 4, а у петуха 8. Что это?

Задача 5

Покажите, что сколько бы членов суммы мы ни взяли - мы никогда не переедим через 2-ку

$$а) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Как вы думаете, может ли указанная сумма превысит 1000000 при достаточно большом количестве слагаемых? А 1000000000?

$$б) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Задача 6

Мартышка поднимается на один из 100 этажей небоскрёба и бросает вниз кокос. Она пытается выяснить, с какого наименьшего этажа нужно бросить кокос, чтобы тот разбился. Каково минимальное число попыток, достаточное для этого, если у мартышки всего два кокоса?

Задача 7

Проезд в автобусе по билету стоит 23 рубля, а без билета бесплатно. Во сколько раз проезд по билету дороже проезда без билета?

Задача 8

Двое делят торт на равные части «по справедливости». Из инструментов у них имеется только нож, но нет никакого способа померять точность деления. Поэтому они договариваются «по справедливости» так: один режет торт на две части, а другой выбирает себе кусок из двух отрезанных. Как «по справедливости» поделить между собой торт троим людям?

Задача 9

В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно долететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

Задача 10

Король решил устроить экзамен трём придворным мудрецам А, В и С. Он сообщил, что у него имеются два белых и три чёрных колпака. После этого король завязал глаза мудрецам и надел каждому чёрный колпак. Развязав глаза, король спросил: «Может ли кто-нибудь из вас определить цвет своего колпака?»

Мудрецы ответили

А: «Нет, так как могу ошибиться»

В: «Нет, так как могу ошибиться»

С: «Да, на мне чёрный колпак!»

Как мудрецу С это удалось?