Математический анализ

Программа коллоквиума

I курс, осенний семестр 2013 года, отделение механики

Лектор – С.В. Шапошников

(1) Множества и подмножества. Операции с множествами: объединение, пересечение, разность. Формулы Моргана.

(2) Декартово произведение множеств. Функция и ее график. Композиция функций. Ассоциативность композиции. Инъекция, сюръекция и биекция. Обратная функция. Понятие отношения. Отношения эквивалентности и порядка.

(3) Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Аксиома индукции и ее эквивалентность существованию в каждом непустом подмножестве натуральных чисел наименьшего элемента.

(4) Множество целых чисел и множество рациональных чисел: отношение порядка, арифметические операции и их свойства. Иррациональность $\sqrt{2}$.

(5) Множество действительных чисел. Аксиома полноты. Существование $\sqrt{2}$. Бесконечные десятичные дроби – модель действительных чисел.

(6) Теорема Вейерштрасса о существовании точной грани. Аксиома Архимеда.

(7) Теорема Кантора о вложенных отрезках.

(8) Эквивалентные (равномощные) множества. Конечные множества.

(9) Число подмножеств множества из n элементов и число всех последовательностей из 0 и 1 длины n. Число k-элементных подмножеств множества из n элементов и число последовательностей из 0 и 1 длины n, в которых k единиц. Свойства C_n^k. Бином Ньютона.

(10) Счетные множества и их свойства. Счетность множества рациональных чисел и множества алгебраических чисел. Примеры несчетных множеств: множество всех подмножеств множества натуральных чисел, множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1, множество действительных чисел.

(11) Континуальные множества. Эквивалентность множеств: непустой интервал, нетривиальный отрезок, множество действительных чисел.

(12) Теорема Кантора о множестве всех подмножеств данного множества. Теорема Кантора-Бернштейна (без доказательства).

(13) Теорема Гейне-Бореля-Лебега о конечном подпокрытии интервалами отрезка.

(14) Предельная точка. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.

(15) Предел последовательности: определение, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности. Арифметика пределов. О-символика.

(16) Переход к пределу в неравенствах. Теорема о зажатой сходимости.

(17) Предел монотонной последовательности. Число e.

(18) Подпоследовательности. Теорема Больцано. Множество частичных пределов. Верхний и нижний пределы. Бесконечные пределы.

(19) Критерий Коши.

(20) Ряд и его сумма. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши сходимости рядов. Сходимость ряда с неотрицательными членами.

Задачи

(1) На сколько частей делят плоскость а) n прямых в общем положении, б) n окружностей в общем положении? Объясните почему нельзя построить круговые диаграммы Эйлера-Венна для четырех и более множеств.

(2) Задана бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$. Всегда ли существует конечный набор функций $f_1, \dots f_N$, композициями которых можно записать любой из этих многочленов?

(3) Докажите, что на прямой можно расположить не более чем счетное множество интервалов, которые попарно не пересекаются.

(4) Докажите эквивалентность следующих множеств: $[0,1]$, $[0,1] \times [0,1]$ и $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

(5) Пусть $[0,1] = A \cup B$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B континуально.

(6) На примере множества рациональных функций покажите, что аксиома Архимеда может нарушаться.

(7) Приведите пример счетного множества, у которого а) нет предельных точек, б) только одна предельная точка, в) счетное множество предельных точек, г) все действительные числа являются предельными точками.

(8) Изолированной точкой множества называется такая его точка, что в некоторой ее проколотой окрестности нет точек этого множества. Приведите пример множества, у которого нет изолированных точек. Приведите пример множества, у которого все точки изолированные. Из некоторого множества удалили все его изолированные точки, затем из того множества, которое получилось, опять удалили все изолированные точки и т.д. Возможно ли такую процедуру проделать бесконечное число раз, причем так, что каждый раз найдется, что удалить?

(9) Пусть $a_n \geq 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

(10) Пусть $a > 0$. Докажите, что последовательность x_n такая, что

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

сходится к $\sqrt{a}$. Оцените скорость сходимости.

(11) Найдите все частичные пределы последовательностей: а) $\sin(nx)$, б) $\sin(\ln n)$.

(12) Докажите, что у последовательности $\sin n^2$ нет предела.

(13) Докажите, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Покажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + o(1),$$

где $C > 0$ – некоторое число.

(14) Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

(15) Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то оцените сколько ему потребуется времени?