Формулировка задачи

Дан произвольный тетраэдр с длинами рёбер a , b, c, d, e, f. Причём именно изображённый на рис.1 тетраэдр, т.к. взаимное расположение рёбер тетраэдра, в отличие от треугольника,определено далеко не однозначно.

Найти: V тетраэдра

Всем старшеклассникам известна формула Герона, выражающая площадь S треугольника (рис.2) через длины его сторон a, b, c:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника, a, b, c - длины его сторон. Эта формула в развёрнутом виде имеет следующий вид:

$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$$

Оказывается в пространстве можно указать аналог формулы Герона для произвольного тетраэдра. Она имеет следующий вид для тетраэдра, изображённого на рис.1. :

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{144}[&e^2c^2(a^2+b^2+d^2+f^2-e^2-c^2)+ \\ &+a^2f^2(b^2+c^2+d^2+e^2-a^2-f^2)+ \\ &+d^2b^2(a^2+c^2+e^2+f^2-d^2-b^2)- \\ &-a^2b^2c^2-a^2e^2d^2-d^2f^2c^2-e^2b^2f^2] \end{aligned} \quad (1)$$

Или такой вид (что то же самое):

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{144}[&(e^2+c^2)(p-2e^2c^2)+(a^2+f^2)(p-2a^2f^2) \\ &+(d^2+b^2)(p-2d^2b^2)-\bigoplus], \end{aligned} \quad (2)$$

где
$p = a^2f^2 + e^2c^2 + b^2d^2$ (a и f, e и c, b и d - пары скрещивающихся рёбер)
$\bigoplus = a^2b^2c^2 + a^2e^2d^2 + d^2f^2c^2 + e^2b^2f^2$ (рёбра, лежащие в одной плоскости)

Решение 1-ое

(школьное, придумано Тартальей)

Первое упоминание в литературе о формуле нахождения объёма тетраэдра через его рёбра было опубликовано Николой Фонтана (1499-1557), более известном и в жизни и в научной литературе под фамилией Тарталья. На самом деле Тарталья не привёл никакой общей формулы, а решал задачу с конкретными длинами рёбер. Но способ, указанный им, применим и к выводу общей формулы.

Разберём подробно доказательство Тартальи, сохранив обозначения его рисунков. Пусть дан тетраэдр с вершинами A, B, C, D. Опустим на ребро BC перпендикуляры AI и DE (в плоскостях треугольников ABC и DBC соответственно, рис.3). Заметим, что длины высот AI и DI мы можем выразить через известные величины (длины рёбер). Проведём через точку I прямую, параллельную ED, а через точку D - прямую, параллельную EI, и в их пересечении получим точку H. Докажем, что прямая DH перпендикулярна плоскости треугольника AIH. Отрезок EI принадлежит основанию треугольников ABC и DBC, поэтому $AI \perp EI$, $DE \perp EI$. Так как $IH \| ED$, то $EI \perp IH$. Получается, что отрезок EI перпендикулярен двум прямым, принадлежащим плоскости AIH, следовательно $EI \perp AIH$, а поскольку $DH \| EI$, получаем $DH \perp AIH$. В треугольнике ADH мы знаем AD (это ребро тетраэдра) и $HD = EI$ (это противолежащие стороны в прямоугольнике), а EI мы можем найти, поскольку знаем стороны и высоты треугольников ABC и DBC. Кроме того, $\triangle ADH$ прямоугольный, следовательно,

$$AH = \sqrt{AD^2 - HD^2}$$

В треугольнике AIH мы знаем теперь все стороны: AI,AH и $IH = ED$.

Опустим в этом треугольнике высоту из A на основание IH, получим точку F (рис. 4). Докажем, что $AF \perp DBC$. Предположим, что основание высоты, опущенной из A на плоскость треугольника DBC, - точка O. По теореме о 3-х $\perp$-х отрезок $OI \perp BC$, но так как $IF \perp BC$, точка O должна лежать на прямой IF. А поскольку $AF \perp IF$, точки O и F совпадают. Таким образом, AF - высота тетраэдра, и мы можем выразить её через известные стороны треугольника AIH. Так как мы можем найти площадь основания BCD по формуле Герона, для нахождения объёма V тетраэдра остаётся использовать известную формулу

$$V = \frac{1}{3} AF * S_{\triangle BCD}$$

Однако в рассуждении Тартальи основные используемые им грани тетраэдра - треугольники ABC и DBC - имели при общем основании BC острые углы, поэтому необходимо обобщить его доказательство на случай произвольных граней. Оказывается, это обобщение можно не проводить, учитывая следующее чисто геометрическое рассуждение: в доказательстве

Тартальи существенно было то, что достаточно было иметь две грани, у которых при общем ребре нет ни одного неострого плоского угла (на рисунке Тартальи таким было ребро BC). Но известно, что такое свойство верно для любого многогранника с треугольными гранями. Действительно, если взять ребро наибольшей длины, то обе прилегающих к нему грани будут иметь при этом ребре острые углы, иначе нашлось бы ребро длины большей, чем рассматриваемое. Значит, в любом тетраэдре мы можем найти ребро, для которого построения Тартальи приводят к рис.3 с ребром BC.

Решение 2-ое

(школьное, придумано Леонардом Эйлером)

После Тартальи прошло почти двести лет, прежде чем Леонард Эйлер в 1752 году провёл вычисление объёма тетраэдра уже не для конкретных числовых значений длин рёбер, а в буквенных обозначениях. Вот его рассуждения.

Обозначим известные длины рёбер: $AB = a, AC = b, BC = c, AD = d, BD = e, CD = f$ В треугольнике ADC опустим из D перпендикуляр на ребро CA, получим точку Q; перпендикуляр из той же точки D в плоскости (ABD) на ребро AB даст точку P. (рис № 5). Из точек Q и P в плоскости треугольника ABC восстановим перпендикуляры к сторонам AC и AB соответственно. Точку их пересечения обозначим через O (рис № 6). Отрезок DO окажется высотой тетраэдра (рис № 7), т.е. $DO \perp ABC$ (это следует из теоремы о 3-х перпендикулярах). Поэтому треугольник AOD - прямоугольный, и $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2}$. Таким образом, чтобы найти DO, необходимо вычислить длину отрезка AO. Длины отрезков AP и AQ мы можем найти из треугольников ABD и ACD.

Для этого выведем общую формулу, используя метод координат. (т.к. в треугольнике высота может падать как на сторону, так и на её продолжение). Возьмём треугольник ABC. Опустим высоту из вершины A на противоположную сторону BC, получим точку H. Пусть начало системы координат совпадает с точкой C, а оси сонаправлены с векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{HA}$ (рис № 8). Точки A, B, C и H имеют следующие координаты: (x, h),$(a, 0)$,$(0, 0)$,$(x, 0)$ (стороны треугольника a, b, c нам известны, h - его высота). Поскольку треугольники AHC и AHB являются прямоугольными с прямыми углами при вершине H, по теореме Пифагора $AC^2 = AH^2 + HC^2$ и $AB^2 = AH^2 + HB^2$ или $b^2 = h^2 + x^2$ и $c^2 = h^2 + (x - a)^2$ Преобразуем второе из этих равенств к виду

$$x^2 - 2ax + a^2 + h^2 = c^2$$

и подставим в получившееся равенство значение $x^2 = b^2 - h^2$. Получим $(b^2 - h^2) - 2ax + a^2 + h^2 = c^2$, т.е. $b^2 + a^2 - c^2 = 2ax$. Отсюда находим

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Вернёмся к нашим отрезками AP и AQ.

$$AP = \frac{a^2 + d^2 - e^2}{2a}, AQ = \frac{b^2 + d^2 - f^2}{2b}$$

Из прямоугольного треугольника APO имеем (рис № 6):

$AO = \sqrt{AP^2 + PO^2}$. Длина AP известна, нужно найти PO. Рассмотрим прямоугольный треугольник (AQS):

$$QS = AQtg(\alpha), AS = \frac{AQ}{\cos(\alpha)}, PS = AS - AP,$$

где $\alpha = \angle BAC$. Прямоугольные треугольники AQS и OPS подобны по двум углам, поэтому отношения соответствующих сторон равны:

$$\frac{QS}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AS}{OS}$$

Следовательно,

$$PO = \frac{PS * AQ}{QS} = \frac{PS}{tg(\alpha)} = \frac{AS - AP}{tg(\alpha)} = \frac{AQ}{\cos(\alpha) * tg(\alpha)} - \frac{AP}{tg(\alpha)} = \frac{AQ}{\sin\alpha} - \frac{AP}{tg(\alpha)}$$

Величины AQ и AP известны, вычислим $\sin(\alpha)$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} * AC * AB * \sin(\alpha) = \frac{1}{2} * ab * \sin(\alpha)$, но её мы можем узнать из формулы Герона, следовательно, $\sin(\alpha) = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab}$

Теперь если проделать все оставшиеся вычисления, получается формула объёма тетраэдра.

Однако и рассуждения Эйлера зависят от конкретного вида тетраэдра и его граней. Их следует уточнить, так как, например, точка O- основание высоты из вершины D - может быть вне треугольника ABC (а существуют такие тетраэдры, у которых высота из каждой вершины падает в точку вне треугольника в соответствующем основании), точки Q и P могут лежать на продолжениях сторон треугольника ABC, и тогда точки O и S будут лежать вне треугольника; кроме того, если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то формула для PO будет неверной, так как PO - длина, т.е. положительна, а $tg(\alpha) < 0$

Приведём доказательство Эйлера в общем виде, не зависящее от того, какие углы в треугольниках: тупые или острые. В плоскости $\triangle ABC$ отметим точку D' такую, что $AD' = AD, CD' = CD$. Для нахождения точки D' достаточно мысленно повернуть грань ACD вокруг прямой AC до положения, когда ACD окажется на плоскости основания ABC. Таких положений два; выберем то положение, когда вершина D попадёт в точку, лежащую с той же стороны, что и вершина B. Эту точку и отметим как D'. Введём теперь систему координат с началом в вершине A и с осью абсцисс вдоль ребра AB (рис № 9). Когда мы уточняли доказательство Тартальи, то вычислили координаты точки C, поэтому будем считать, что координаты $C(x_c, y_c)$ нам известны. А координаты точки $Q(x_Q, y_Q)$ (основания перпендикуляра, опущенного из D' на AC) надо найти. Заметим, что построенная таким образом точка Q совпадает с точкой Q из доказательства Эйлера. Чтобы убедиться в этом, повернём треугольник ACD вокруг прямой AC, чтобы он принадлежал плоскости ABC. При этом точка D займёт положение D', а перпендикуляр DQ перейдёт в $D'Q$.

Координаты точек прямой AC определяются уравнением $y = kx$, где $k = tg(\alpha)$, поэтому $y_Q = kx_Q$ и $y_C = kx_C$. Следовательно,

$AQ^2 = x_Q^2 + k^2 x_Q^2$ и $CQ^2 = (x_Q - x_C)^2 + k^2(x_Q - x_C)^2$
Поскольку угол AQD' прямой,
$AQ^2 + QD'^2 = AD'^2$, т.е. $x_Q^2 + k^2 x_Q^2 + QD'^2 = AD'^2$,
аналогично
$CQ^2 + QD'^2 = CD'^2$ т.е. $(x_Q - x_C)^2 + k^2(x_Q - x_C)^2 + QD'^2 = CD'^2$
Вычтем из предпоследней строчки - последнюю, получим:

$$2x_Q x_C - x_C^2 + 2k^2 x_Q x_C - k^2 x_C = AD'^2 - CD'^2 = AD^2 - CD^2 = d^2 - f^2, x_q = \\ = \frac{1}{2}x_C + \frac{d^2 - f^2}{2x_C(1+k^2)} \quad (3)$$

Далее, рассмотрев $\triangle DAB$, по формуле для положения высоты мы можем вычислить абсциссу x_P точки P в нашей системе координат. Таким образом, координаты $P(x_P, 0)$ нам тоже известны.

Абсцисса точки O пересечения перпендикуляров, восстановленных в плоскости ABC к AB в точке P и к AC в точке Q, равна $x_O = x_P$. Чтобы определить её ординату y_O, найдём уравнение прямой OQ. Поскольку эта прямая перпендикулярная прямой AC, её угловой коэффициент равен $-\frac{1}{k}$, где k - угловой коэффициент AC. Воспользовавшись тем, что Q принадлежит рассматриваемой прямой, запишем окончательное уравнение:

$$y = -\frac{1}{k}(x - x_Q) + y_Q$$

Подставим в это уравнение $x = x_O = x_P$ и получим y_O:

$$y_O = -\frac{1}{k}(x_P - x_Q) + y_Q$$

Теперь можно получить выражение для выысоты DO тетраэдра:

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{d^2 - x_O^2 - y_O^2}$$

в которой все величины выражаются через длины рёбер.

Решение 3-ье

(школьное, придумано мною)

1) Объём пирамиды будем искать с помощью известной формулы

$$V = \frac{2}{3} * \frac{S_1 * S_2}{a} * \sin(\alpha),$$

где S_1 и S_2 - площади 2-х смежных граней тетраэдра, a - длина ребра, которое лежит на пересечении этих граней, α - угол между этими гранями.

S_1 и S_2 можно считать известными (по формуле Герона).

Главное - найти $\sin(\alpha)$

2) Изобразим произвольную пирамиду

Проведём дополнительные построения, как показано на рис.10

$$S_{\triangle ASC} = \frac{a * h_1}{2} = geron_1 \Rightarrow h_1 = \frac{2}{a} * geron_1$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a * h_2}{2} = geron_2 \Rightarrow h_2 = \frac{2}{a} * geron_2$$

$$AG = \sqrt{e^2 - {h_1}^2}$$

$$AH = \sqrt{b^2 - {h_2}^2}$$

$$GH = \mid AH - AG \mid = \mid \sqrt{b^2 - {h_2}^2} - \sqrt{e^2 - {h_1}^2} \mid$$

Модуль мы надеваем потому, что разность

$$(AH - AG)$$

может быть и отрицательной, например, для такой пирамиды. рис.11.

Но нас интересует именно модуль разности.

$$geron_1 = \frac{\sqrt{(a+d+e)(a+d-e)(a+e-d)(e+d-a)}}{4}$$

$$geron_2 = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4}$$

3) Теперь самый важный идейный момент доказательства.

От рис. 10. Позаимствуем в рис. 12. только: h_1, h_2, GH, f. Заменим обозначения по отношению к рис. 10.

$$S \to Q_2, B \to Q_3, H \to Q_4$$

Из $\triangle Q_1Q_2Q_3$:

$$Q_1Q_3 = \sqrt{f^2 - GH^2}$$

с другой стороны из $\triangle Q_1Q_3Q_4$: по теореме косинусов:

$$Q_1Q_3^2 = h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2\cos\alpha \quad (\text{ А это тот самый } \alpha!) \implies$$

$$\cos\alpha = \frac{h_1^2 + h_2^2 - Q_1Q_3^2}{2h_1h_2}$$

Заметим, что $\alpha \in (0, \Pi)$ по смыслу существования самой пирамиды. Поэтому $\sin\alpha > 0$. Нам известно выражение для $\cos\alpha \implies$ Найдём $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = +\sqrt{1 - \cos\alpha^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{h_1^2 + h_2^2 - Q_1Q_3^2}{2h_1h_2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - Q_1Q_3^2)^2}}{2h_1h_2}$$

Пусть $Q_1Q_3 = q$, тогда

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - q^2)^2}}{2h_1h_2}$$

4) А вот теперь воспользуемся формулой $V = \frac{2}{3} * \frac{S_1 * S_2}{a} * \sin(\alpha)$:

$$V = \tfrac{2}{3} * \tfrac{geron_1 geron_2}{a} * \tfrac{\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - q^2)^2}}{2h_1h_2} = \tfrac{2}{3} * \tfrac{geron_1 geron_2}{a} * \tfrac{\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - q^2)^2}}{2\frac{2}{a}geron_1\frac{2}{a}geron_2} =$$

$$= \frac{2}{3} * \frac{\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - q^2)^2}}{\frac{8}{a}} = \frac{a}{12}\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - q^2)^2} =$$

$$= \frac{a}{12}\sqrt{4\left(\frac{2}{a}geron_1\right)^2\left(\frac{2}{a}geron_2\right)^2 - \left[\left(\frac{2}{a}geron_1\right)^2 + \left(\frac{2}{a}geron_2\right)^2 - (f^2 - GH^2)\right]^2}, \tag{4}$$

где

$$GH^2 = \left(\sqrt{b^2 - \left(\frac{2}{a}geron_2\right)^2} - \sqrt{e^2 - \left(\frac{2}{a}geron_1\right)^2}\right)^2$$

(вот поэтому-то и был важен модуль, т.к. нам требуется GH^2)

5) Размышления по поводу будущей формулы:

$$V = f(a, b, c, d, e, f)$$

В какой-то мере ф-ия f будет обязательно симметрической относительно входящих в неё переменных.

Размерность выражения должна равняться трём, так как мы считаем объём.

6) Теперь техническая часть.

Часть 6.I

а)

$$
\begin{aligned}
geron_1 &= \sqrt{\tfrac{a+d+e}{2}\left(\tfrac{a+d+e}{2}-e\right)\left(\tfrac{a+d+e}{2}-d\right)\left(\tfrac{a+d+e}{2}-a\right)} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+d+e}{2}\right)\left(\frac{a+d-e}{2}\right)\left(\frac{a+e-d}{2}\right)\left(\frac{d+e-a}{2}\right)} = \\
&= \sqrt{\frac{(a^2+2ad+d^2-e^2)(e+(a-d))(e-(a-d))}{2^4}} = \\
&= \frac{\sqrt{(a^2+2ad+d^2-e^2)(e^2-(a-d)^2)}}{4} = \frac{\sqrt{(a^2+2ad+d^2-e^2)(e^2-a^2-d^2+2ad)}}{4} = \\
&= \frac{\sqrt{a^2e^2-a^4-a^2d^2+2a^3d+2ade^2-2a^3d-2d^3a+4a^2d^2+d^2e^2-a^2d^2-d^4+}}{4} \\
&\quad \frac{\overline{+2ad^3-e^4+a^2e^2+e^2d^2-2ade^2}}{4} = \\
&= \frac{\sqrt{a^2e^2-a^4-a^2d^2+4a^2d^2+d^2e^2-a^2d^2-d^4-e^4+a^2e^2+e^2d^2}}{4} = \\
&= \frac{\sqrt{2a^2e^2+2a^2d^2+2d^2e^2-(a^4+d^4+e^4)}}{4} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

б)

$$geron_2 \quad = \quad \text{по аналогии} \quad = \quad \frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)}}{4} \qquad (6)$$

в)

$$
\begin{aligned}
q^2 &= f^2 - GH^2 = f^2 - [\sqrt{b^2-h_2^2} - \sqrt{e^2-h_1^2}]^2 = \\
&= f^2 - \left[b^2 - h_2^2 + e^2 - h_1^2 - 2\sqrt{(b^2-h_2^2)(e^2-h_1^2)}\right] = \\
&= f^2 - b^2 - e^2 + h_1^2 + h_2^2 + 2\sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

г)

$h_1 = \frac{2}{a} geron_1, h_2 = \frac{2}{a} geron_2$

$$h_1 h_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 geron_1 geron_2 =$$
$$= \frac{4}{a^2} \frac{\sqrt{(2a^2e^2 + 2a^2d^2 + 2d^2e^2 - a^4 - e^4 - d^4)(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{4^2} =$$
$$= \frac{1}{4a^2}(4a^4e^2b^2 + 4a^4e^2c^2 + 4a^2e^2b^2c^2 - 2a^6e^2 - 2a^2e^2b^4 - 2a^2e^2c^4 + 4a^4d^2b^2 +$$
$$4a^4d^2c^2 + 4a^2d^2b^2c^2 - 2a^6d^2 - 2a^2d^2b^4 - 2a^2d^2c^4 + 4d^2e^2a^2b^2 + 4d^2e^2a^2c^2 +$$
$$+ 4d^2e^2b^2c^2 - 2d^2e^2a^4 - 2d^2e^2b^4 - 2d^2e^2c^4 - 2a^6b^2 - 2a^6c^2 - 2a^4b^2c^2 + a^8 + a^4b^4 +$$
$$+ a^4c^4 - 2a^2b^2e^4 - 2a^2c^2e^4 - 2b^2c^2e^4 + a^4e^4 + b^4e^4 + c^4e^4 - 2a^2b^2d^4 - 2a^2c^2d^4 -$$
$$- 2d^4b^2c^2 + a^4d^4 + b^4d^4 + c^4d^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4a^2}\sqrt{GGG} \quad (8)$$

Обозначим через GGG сложное выражение под корнем.
Часть 6.II

$V = \frac{a}{12}\sqrt{4h_1^2h_2^2 - (h_1^2 + h_2^2 - q^2)^2} =$

$$= \frac{a}{12}\sqrt{4h_1^2h_2^2 - \left(h_1^2 + h_2^2 - f^2 + b^2 + e^2 - h_1^2 - h_2^2 - 2\sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2}\right)^2} =$$
$$= \frac{a}{12}\sqrt{4h_1^2h_2^2 - \left[b^2 + e^2 - f^2 - 2\sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2}\right]^2} =$$
$$= \frac{a}{12}(4h_1^2h_2^2 - [(b^2 + e^2 - f^2)^2 + 4(b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2) -$$
$$- 4\sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2}(b^2 + e^2 - f^2)])^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{12}(4h_1^2h_2^2 - (b^2 + e^2 - f^2)^2 -$$
$$- 4(b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2) + \sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2}(b^2 + e^2 - f^2))^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{a}{12}(-(b^2+e^2-f^2)^2 - 4b^2e^2 + 4b^2h_1^2 + 4e^2h_2^2 + 4\sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2}(b^2+e^2-f^2))^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{a}{12}(-b^4 - e^4 - f^4 - 2b^2e^2 + 2b^2f^2 + 2e^2f^2 - 4b^2e^2 + 4b^2h_1^2 + 4e^2h_2^2$$
$$+ 4\sqrt{b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2}(b^2 + e^2 - f^2))^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Избавимся от корня под корнем путём выделение полного квадрата из следующего выражения

$$b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2 = b^2e^2 - b^2\tfrac{4}{a^2}\tfrac{2a^2e^2+2a^2d^2+2d^2e^2-a^4-d^4-e^4}{4^2} -$$
$$- e^2\frac{4}{a^2}\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4^2} + \frac{1}{(4a^2)^2} * GGG = \frac{16a^4b^2e^2}{(4a^2)^2} -$$
$$- \frac{8a^2e^2b^2+8a^2d^2b^2+8d^2e^2b^2-4b^2a^4-4b^2d^4-4b^2e^4}{4^2a^2} -$$
$$- \frac{8e^2a^2b^2+8e^2a^2c^2+8e^2b^2c^2-4e^2a^4-4e^2b^4-4e^2c^4}{4^2a^2} + \frac{GGG}{(4a^2)^2} =$$
$$= \frac{16a^4b^2e^2-8a^4e^2b^2-8a^4d^2b^2-8a^2d^2e^2b^2+4b^2a^6+4b^2d^4a^2+4b^2e^4a^2}{(4a^2)^2}$$
$$\frac{-8a^4b^2e^2-8a^4e^2c^2-8a^2b^2e^2c^2+4e^2a^6+4e^2b^4a^2+4e^2c^4a^2}{(4a^2)^2} + \frac{GGG}{(4a^2)^2} =$$
$$= [(4e^2a^6+4e^2b^4a^2+4e^2c^4a^2+4b^2a^6+4b^2d^4a^2+4b^2e^4a^2-8a^4d^2b^2-$$
$$-8a^2d^2e^2b^2-8a^4e^2c^2-8a^2b^2e^2c^2)+(4a^4e^2b^2+4a^4e^2c^2+4a^2e^2b^2c^2-$$
$$-2a^6e^2-2a^2e^2b^4-2a^2e^2c^4+4a^4d^2b^2+4a^4d^2c^2+4a^2d^2b^2c^2-2a^6d^2-$$
$$-2a^2d^2b^4-2a^2d^2c^4+4d^2e^2a^2b^2+4d^2e^2a^2c^2+4d^2e^2b^2c^2-2d^2e^2a^4-$$
$$-2d^2e^2b^4-2d^2e^2c^4-2a^6b^2-2a^6c^2-2a^4b^2c^2+a^8+a^4b^4+a^4c^4-$$
$$-2a^2b^2e^4-2a^2c^2e^4-2b^2c^2e^4+a^4e^4+b^4e^4+c^4e^4-2a^2b^2d^4-2a^2c^2d^4-$$
$$-2d^4b^2c^2+a^4d^4+b^4d^4+c^4d^4)] * \frac{1}{(4a^2)^2} =$$
$$= [4a^4e^2b^2-4a^4e^2c^2-4a^2e^2b^2c^2+2a^6e^2+2a^2e^2b^4+2a^2e^2c^4-4a^4d^2b^2+$$
$$+4a^4d^2c^2+4a^2d^2b^2c^2-2a^6d^2-2a^2d^2b^4-2a^2d^2c^4-4a^2d^2b^2e^2+$$
$$+4d^2e^2a^2c^2+4d^2e^2b^2c^2-2d^2e^2a^4-2d^2e^2b^4-2d^2e^2c^4+2a^6b^2-$$
$$-2a^6c^2-2a^4b^2c^2+a^8+a^4b^4+a^4c^4+2a^2b^2e^4-2a^2c^2e^4-2b^2c^2e^4+a^4e^4+$$
$$+b^4e^4+c^4e^4+2a^2b^2d^4-2a^2c^2d^4-2d^4b^2c^2+a^4d^4+b^4d^4+c^4d^4] * \frac{1}{(4a^2)^2} \tag{10}$$

А теперь самое интересное - разложить этот многочлен на множители. Если посмотреть на него ПРЕДЕЛЬНО внимательно, то мы увидим, что где-то, только с другими знаками, он нам уже встречался. В самом деле, когда мы считали

$$h_1 * h_2 = \tfrac{4}{a^2}\tfrac{1}{4^2} * ((2a^2e^2 + (-)2a^2d^2 + (-)2d^2e^2 - (+)a^4 - (+)e^4 - (+)d^4)*$$
$$* (2a^2b^2 + (-)2a^2c^2 + (-)2b^2c^2 - (+)a^4 - (+)b^4 - (+)c^4))^{\frac{1}{2}} = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4a^2}(4a^4e^2b^2 + (-)4a^4e^2c^2 + (-)4a^2e^2b^2c^2 - (+)2a^6e^2 - (+)2a^2e^2b^4 - (+)$$
$$- (+)2a^2e^2c^4 + (-)4a^4d^2b^2+$$
$$+ 4a^4d^2c^2 + 4a^2d^2b^2c^2 - 2a^6d^2 - 2a^2d^2b^4 - 2a^2d^2c^4 + (-)4d^2e^2a^2b^2 + 4d^2e^2a^2c^2+$$
$$+4d^2e^2b^2c^2 - 2d^2e^2a^4 - 2d^2e^2b^4 - 2d^2e^2c^4 - (+)2a^6b^2 - 2a^6c^2 - 2a^4b^2c^2 + a^8 + a^4b^4+$$
$$+a^4c^4 - (+)2a^2b^2e^4 - 2a^2c^2e^4 - 2b^2c^2e^4 + a^4e^4 + b^4e^4 + c^4e^4 - (+)2a^2b^2d^4 - 2d^4b^2c^2-$$
$$- 2a^2c^2d^4 + a^4d^4 + b^4d^4 + c^4d^4)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Там, где указаны знаки в скобочках, это те знаки, которые как раз и содержатся в раскладываемом многочлене и... разложенный он при этих знаках стоит под корнем в (10). Таким образом

$$b^2e^2 - b^2h_1^2 - e^2h_2^2 + h_1^2h_2^2 = (2a^2e^2 - 2a^2d^2 - 2d^2e^2 + a^4 + e^4 + d^4)*$$
$$*(2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)(\frac{1}{4a^2})^2 = \left[\frac{(a^2+e^2-d^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2}\right]^2 \quad (13)$$

Вернёмся к объёму

$$V = \frac{a}{12}(-b^4 - e^4 - f^4 - 6e^2b^2 + 2b^2f^2 + 2e^2f^2 + 4b^2h_1^2 + 4e^2h_2^2+$$
$$+ \frac{4(b^2+e^2-f^2)(a^2+e^2-d^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2})^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Преобразуем отдельно выражение:

$$(b^2+e^2-f^2)(a^2+e^2-d^2)(a^2+b^2-c^2) =$$
$$= (a^2b^2 + b^2e^2 - b^2d^2 + e^2a^2 + e^4 - e^2d^2 - a^2f^2 - e^2f^2 + f^2d^2)(a^2+b^2-c^2) =$$
$$= a^4b^2 + a^2b^4 - a^2b^2c^2 + a^2b^2e^2 + b^4e^2 - b^2e^2c^2 - a^2b^2d^2 - b^4d^2 + b^2d^2c^2 + e^2a^4+$$
$$+e^2a^2b^2 - a^2e^2c^2 + e^4a^2 + e^4b^2 - e^4c^2 - e^2d^2a^2 - e^2d^2b^2 + e^2d^2c^2 - a^4f^2 - a^2f^2b^2+$$
$$+ a^2f^2c^2 - a^2e^2f^2 - e^2f^2b^2 + c^2e^2f^2 + f^2d^2a^2 + f^2d^2b^2 - f^2d^2c^2 = M \quad (15)$$

Вернёмся к подкоренному выражению объёма:

$$-b^4-e^4-f^4-6e^2b^2+2b^2f^2+2e^2f^2+4b^2\left(\tfrac{4}{a^2}\tfrac{2a^2e^2+2a^2d^2+2d^2e^2-a^4-d^4-e^4}{4^2}\right)+$$
$$+4e^2\left(\frac{4}{a^2}\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4^2}\right)+\frac{M}{a^2}=$$
$$=[-b^4a^2-e^4a^2-f^4a^2-6e^2b^2a^2+2b^2f^2a^2+2e^2f^2a^2+2a^2b^2e^2+2a^2d^2b^2+$$
$$+2d^2e^2b^2-a^4b^2-d^4b^2-e^4b^2+2a^2b^2e^2+2a^2c^2e^2+2b^2c^2e^2-a^4e^2-b^4e^2-$$
$$-c^4e^2+a^4b^2+a^2b^4-a^2b^2c^2+a^2b^2e^2+b^4e^2-b^2e^2c^2-a^2b^2d^2-b^4d^2+$$
$$+b^2d^2c^2+e^2a^4+e^2a^2b^2-a^2e^2c^2+e^4a^2+e^4b^2-e^4c^2-e^2d^2a^2-e^2d^2b^2+e^2d^2c^2-a^4f^2-$$
$$-a^2f^2b^2+a^2f^2c^2-a^2e^2f^2-e^2f^2b^2+c^2e^2f^2+f^2d^2a^2+f^2d^2b^2-f^2d^2c^2]\frac{1}{a^2}=$$
$$=[-f^4a^2+a^2b^2f^2+a^2e^2f^2+a^2b^2d^2+d^2e^2b^2-d^4b^2+a^2c^2e^2+b^2c^2e^2-c^4e^2-$$
$$-a^2b^2c^2-b^4d^2+b^2d^2c^2-e^4c^2-a^2d^2e^2+e^2d^2c^2-a^4f^2+a^2f^2c^2-e^2f^2b^2+$$
$$+c^2e^2f^2+f^2d^2a^2+f^2d^2b^2-f^2d^2c^2]\frac{1}{a^2} \quad (16)$$

Это то, что стоит под корнем. $\sqrt{\frac{1}{a^2}}*a$ сократятся и остаётся долгожданная формула.

7) Первый вариант формулы

$$V=\tfrac{1}{12}([a^2e^2f^2+a^2d^2f^2+a^2b^2f^2+a^2c^2f^2+a^2b^2d^2+a^2c^2e^2+$$
$$+c^2d^2e^2+c^2f^2e^2+c^2b^2e^2+d^2f^2b^2+d^2e^2b^2+d^2c^2b^2]-$$
$$-[a^2b^2c^2+a^2d^2e^2+d^2f^2c^2+f^2e^2b^2]-$$
$$-[a^4f^2+a^2f^4+c^4e^2+e^4c^2+b^4d^2+d^4b^2])^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Первая группа из 12 слагаемых - незамкнутые ломаные. Вторая группа - 4 штуки - лежащие в одной плоскости. Последняя группа - 6 штук - скрещивающиеся.

8) Второй вариант формулы

Пусть квадрат каждого элемента пока равен ему самому, тогда:

$$aef, adf, abf, acf - \text{первая группа}$$

$$ace, cde, cfe, cbe - \text{первая группа}$$

$$abd, dfb, deb, dcb - \text{первая группа}$$

$$(*)=abc+ade+dfc+feb$$

$$= af(e+d+b+c)+ec(a+d+f+b)+db(a+f+e+c)-(*)-af(a+f)-ce(c+e)- \\ -bd(b+d) = af(e+c)+af(b+d)+ec(a+f)+ec(d+b)+db(a+f)+db(e+f)- \\ -af(a+f)-ec(e+c)-bd(b+d)-(*) = (e+c)(af+db-ec)+(b+d)(af+ec-bd)+ \\ +(a+f)(ec+db-af)-(*) \quad (18)$$

Пусть $a^2f^2 + d^2b^2 + e^2c^2 = p$, тогда при обратной замене:

$V = \frac{1}{12}\sqrt{(e^2+c^2)(p-2e^2c^2)+(b^2+d^2)(p-2b^2d^2)+(a^2+f^2)(p-2a^2f^2)-(*)}$, где $(*) = (a^2b^2c^2 + a^2d^2e^2 + d^2f^2c^2 + f^2e^2b^2) -$ лежащие в одной плоскости

$a^2f^2 + e^2c^2 + b^2d^2 = p$, где a и f, e и c, b и $d-$ (19)

Примечание: удобство 2-ого варианта формулы в сравнении с 1-м заключается в том, что во 2-м варианте не надо иметь дело с незамкнутыми ломаными, которые очень трудоёмко выписывать.

Решение 4-ое

(с использованием высшей математики)

В одной плоскости лежат adc, abe, cbf, fde. Как указано на рисунке 13.

$$\cos(ac) = \frac{a^2 + c^2 - d^2}{2ac}, \cos(ab) = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}, \cos(bc) = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2bc}$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{vmatrix}}$$

$$
\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{vmatrix} = (a,a)(b,b)(c,c) + (a,c)(b,a)(c,b) + (a,b)(b,c)(c,a) -
$$
$$
- (c,a)(b,b)(a,c) - (a,a)(c,b)(b,c) - (b,a)(a,b)(c,c) =
$$
$$
= a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 \frac{(a^2+c^2-d^2)}{2ac} \frac{(a^2+b^2-e^2)}{2ab} \frac{(b^2+c^2-f^2)}{2bc} +
$$
$$
+ a^2b^2c^2 \frac{(a^2+c^2-d^2)}{2ac} \frac{(a^2+b^2-e^2)}{2ab} \frac{(b^2+c^2-f^2)}{2bc} - b^2(a,c)^2 - a^2(b,c)^2 -
$$
$$
- c^2(a,b)^2 =
$$
$$
= a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2 \frac{(a^2+c^2-d^2)(a^2+b^2-e^2)(b^2+c^2-f^2)}{2^3a^2b^2c^2} -
$$
$$
-b^2a^2c^2 \left(\frac{a^2+c^2-d^2}{2ac}\right)^2 - a^2b^2c^2 \left(\frac{b^2+c^2-f^2}{2bc}\right)^2 - c^2a^2b^2 \left(\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}\right)^2 =
$$
$$
= \frac{1}{4}[4a^2b^2c^2 + (a^4+a^2b^2-a^2e^2+a^2c^2+c^2b^2-c^2e^2-a^2d^2-d^2b^2+d^2e^2)(b^2+c^2-f^2) -
$$
$$
-b^2(a^4+c^4+d^4+2a^2c^2-2a^2d^2-2c^2d^2) - a^2(b^4+c^4+f^4+2b^2c^2-2b^2f^2-2c^2f^2) -
$$
$$
-c^2(a^4+b^4+e^4+2a^2b^2-2a^2e^2-2b^2e^2)] = \frac{1}{4}[4a^2b^2c^2 + a^4b^2 + a^4c^2 - a^4f^2 + a^2b^4 +
$$
$$
+a^2b^2c^2 - a^2b^2f^2 - a^2e^2b^2 - a^2e^2c^2 + a^2e^2f^2 + a^2b^2c^2 + a^2c^4 - a^2c^2f^2 + c^2b^4 + c^4b^2 -
$$
$$
- c^2b^2f^2 - c^2e^2b^2 - c^4e^2 + c^2e^2f^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2 + a^2d^2f^2 - d^2b^4 - d^2b^2c^2 +
$$
$$
+ d^2b^2f^2 + d^2e^2b^2 + d^2e^2c^2 - d^2e^2f^2 - a^4b^2 - c^4b^2 - d^4b^2 - 2a^2b^2c^2 + 2a^2b^2d^2 +
$$
$$
+2b^2c^2d^2 - a^2b^4 - a^2c^4 - a^2f^4 - 2a^2b^2c^2 + 2a^2b^2f^2 + 2a^2c^2f^2 - a^4c^2 - b^4c^2 - e^4c^2 -
$$
$$
- 2a^2b^2c^2 + 2a^2e^2c^2 + 2b^2e^2c^2] = \frac{1}{4}[-a^4f^2 + a^2b^2f^2 + a^2e^2c^2 + a^2e^2f^2 + a^2c^2f^2 +
$$
$$
+ c^2e^2b^2 - c^4e^2 + c^2e^2f^2 + a^2b^2d^2 + a^2d^2f^2 - d^2b^4 + d^2b^2c^2 + d^2b^2f^2 + d^2e^2b^2 +
$$
$$
+ d^2e^2c^2 - d^4b^2 - a^2f^4 - e^4c^2 - (*)] =
$$
$$
= \frac{1}{4}[(a^2b^2f^2 + a^2e^2c^2 + a^2e^2f^2 + a^2c^2f^2 + c^2e^2b^2 + c^2e^2f^2 + a^2b^2d^2 + a^2d^2f^2 +
$$
$$
+d^2b^2c^2 + d^2b^2f^2 + d^2e^2b^2 + d^2e^2c^2) - (a^4f^2 + a^2f^4 + d^4b^2 + b^4d^2 + e^4c^2 + e^2c^4) - (*)] \tag{20}
$$

А это и есть формула, которую мы уже видели!

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Природа формулы для объёма тетраэдра через двугранный угол.

Вывод формулы для объёма тетраэдра, придуманный мною - опирается на пространственный аналог формулы для нахождения площади треугольника по двум сторонам и углу между ними $S = \frac{1}{2}\sin(\alpha)bc$ - нахождение объёма по двугранному углу между двумя гранями, длине ребра и площадям прилегающих к этому двугранному углу граням.

Пусть S_1 и S_2 - площади двух граней тетраэдра, α - двугранный угол между ними, a - длина смежного ребра. (рис. № 14)

Тогда

$$V = \frac{2}{3}\frac{S_1 S_2}{a}\sin(\alpha)$$

Опустим высоту пирамиды из вершины D на плоскость (ABC) в точку O. Проведём перпендикуляры DH и OH в грянях ADB и (ACB) соответственно, чем построим двугранный угол $\alpha=$ углу DHO.

Пусть $DO = h$, $DH = l$

Примечание: если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $sin(\beta) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) = \frac{h}{l}$, т.е. и для этого случая теорема работает.

$$1) V = \frac{1}{3}S_1 h$$

$$2) S_2 = \frac{1}{2}al \Rightarrow l = \frac{2S_2}{a}$$

$$3) sin(\alpha) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = \sin(\alpha) l = \frac{sin(\alpha)2S_2}{a}$$

$$4) V = \frac{1}{3}S_1\left(\frac{sin(\alpha)2S_2}{a}\right) = \frac{2}{3}\frac{S_1 S_2}{a}\sin(\alpha)$$