9 класс, математика 2012 год (задание на дом)

6. На сторонах выпуклого четурехугольника как на диаметрах построены круги. Докажите, что они покроют всю внутреннюю область четырехугольника.

Доказательство:

Пусть не покроют, тогда найдётся точка, не лежащая ни в одной из окружностей. Рассмотрим углы, которые образует эта точка с диаметрами окружностей. Т.к. она не лежит ни на одной из них, то это значит, что углы будут необходимо острыми, т.к. если бы точка лежала на окружностях - углы были бы прямые, а если бы лежала внутри окружностей, то углы были бы тупыми. Т.е. эта точка образует с 4-мя сторонами четырёхугольника 4 острых угла, что невозможно, т.к. в этом случае их сумма не может быть 360 градусов.

7. Решите систему уравнений:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{99} + x_{100} + x_1 = 0$$

$$x_{100} + x_1 + x_2 = 0$$

Решение:

$$\begin{aligned} x_{100} = x_3 = x_6 = x_9 = \text{...(проходимся по остаткам} = 0 \text{ от деления на 3)...} = x_{99} = \\ = x_2 = x_5 = \text{...(проходимся по остаткам} = 2 \text{ от деления на 3)...} = x_{98} = \\ = x_1 = \text{...(проходимся по остаткам} = 1 \text{ от деления на 3)...} = x_{97} = x_{100} \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом всё они равны между собой, а значит из любого из уравнений все они равны нулю. Единственное решение системы - набор из одних нулей.

(Через высшую математику это понятно, если убедиться в том, что определитель таких матриц ненулевой)

8. Даны угол и точка внутри него. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через данную точку.

Построение:

1) Проведем биссектрису угла NQ.

2) Отметим на ней точку O, опустим перпендикуляры OF и OE на стороны угла.

3) Построим окружность с центром в точке O и радиусом
OE.

4) Проведем луч NA, который пересекает окружность в точке T.

5) Проведем прямую AO_1, так что AO_1 || TO. Тогда $\triangle NTO$ и $\triangle NAO_1$ подобны, так что

$$\frac{AO_1}{TO} = \frac{AN}{NT} = \frac{O_1N}{NO} = k$$

6) Построим окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1A_1.

Докажем, что эта окружность искомая, то есть $AO_1 = O_1M = O_1P$, где O_1M и AO_1 — перпендикуляры из точки O_1 на стороны угла.

Так как $\triangle NMO_1$ и $\triangle NFO$ подобны, то $\frac{MO_1}{FO} = \frac{O_1N}{NO} = k$ То есть $\frac{MO_1}{OT} = k$, $MO_1 = k * OT = AO_1$ Равенство $O_1M = O_1P$ следует из равенства $\triangle NMO_1$ $\triangle NPO_1$ Значит. окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1A искомая.

9. На какую цифру оканчивается число $7^{7^{7^7}}$? (Такая запись предполагает следующий порядок возведения в степень $7^{(7^{(7^7)})}$).

10. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC, у которого между точками A и B взята на окружности точка P. Докажите, что

$$PA + PB = PC$$

Решение:

Построить на биссектрису 2 правильных треугольника APA_1 и BPB_1 A биссектриса она (PC) в треугольнике ABP, т.к. углы APC и BPC опираются на дуги в 60 градусов. Докажем, что треугольники CAA_1 и CBB_1 равны.

1) AC=BC изначально

2) Докажем равенство углов: углы PBC и PAC в сумме равны 180 градусов. Если выкинуть из них 2 угла по 60 градусов, останется 60 в сумме на уголки B_1B1C и A_1AC

А также в сумме 60 градусов на уголки BCA_1 и ACA_1 И между собой они попарно в сумме по 60.

Поэтому можно заметить равенство нужных углов, а значит и нужных треугольников, из чего видно, что теорема верна.