РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ - ЛИСТОК 13

1. Подстановка вместо выражения

$$\begin{cases}(x+2y)(2x-y+1)=6,\\ \frac{2x-y+1}{x+2y}=\frac{2}{3};\end{cases}$$

2. Замена буквенной части одного уравнения числовой частью другой

$$\begin{cases}x+y=3,\\ x^3+x^2y=12;\end{cases}$$

3. Обыкновенный метод подстановки (с учётом выбора степени)

$$\begin{cases}x+y^3=2,\\ 2x+x^2+5y^3=8;\end{cases}$$

4. Следствие и равносильность

I. Не допускается одновременное умножение и сложение

$$\begin{cases}x=2,\\ y=3;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy=6,\\ x+y=5;\end{cases}$$

Приобретаются лишние решения, необходимо делать проверку

II. Системы равносильны в том случае, если новая система содержит одно уравнение исходной системы (для систем 2-х уравненией).

$$\begin{cases}x=2,\\ y=3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=5,\\ y=3;\end{cases}$$

III. Однако допускается одновременное почленное вычитание и умножение.

$$\begin{cases}x-y=2,\\ x^2-y^2=8;\end{cases}$$

5. Сложение ради ликвидации ряда переменных. Эффективно в системах, где общая степенб уравнение $\geq$ 2, а уравнения не являются однородными (очень разнообразно применяемый метод)

$$\begin{cases}12x^2+2y^2-6x+5y=3,\\ 18x^2+3y^2-6x+8y=7;\end{cases}$$

6. Простое деление

$$\begin{cases}x^3+xy^2=10,\\ y^3+x^2y=5;\end{cases}$$

7. Из системы в совокупность (свойства систем)

$$\begin{cases}x^2+xy=6x,\\ x^2+y^2=3(x+y);\end{cases}$$

8. Системы уравнений с модулями, где можно произвести замену $y^2=|y|^2$, т.к. в них есть квадраты (чётные степени)

$$\begin{cases}|x|+y^2=13,\\ x+|y|=-1;\end{cases}$$

9. Системы уравнений с модулями - общий метод

$$\begin{cases} |x| + y^2 = 13, \\ x + |y| = -1; \end{cases}$$

10. Не забыть о решениях в системах уравнений с модулями вида

$$\begin{cases} |b| = x, \\ |a| = y; \end{cases}$$

11. Сложение ради получения многочленов, которые можно преобразовать в n-ую степень суммы (в данном случае в куб)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30; \end{cases}$$

12. Оригинальное деление (с предварительным разложением на множители)

Замечание: В данном случае мы ипользуем деление, т.к.

1) Уравнение неоднородное

2) Сложением нельзя ликвидировать квадраты

3) Системы несимметричные

4) Метод подстановки неприменим так, чтобы осталась одна переменная в уравнении

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases}$$

13. Системы уравнений с ответами, которые целиком или частично принадлежать R

$$\begin{cases} x - xy = 0, \\ xy - xy^2 = 0; \end{cases}$$

14. Разложение квадратных трёхчленов, содержащих буквенные значения

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + x + y = 6, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 + x - y = 2; \end{cases}$$

15. Сложение для получения квадратного уравнения сразу относительно двух переменных

$$\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$$

16. Симметрические системы уравнений

Симметрическими называются такие системы, в которых из обоих уравнений системы при замене переменных друг на друга смысл их не меняется.

Симметрическая (оба уравнения системы симметрические)

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 5, \\ y^8x^8 - 3xy = 1; \end{cases}$$

Несимметрическая (2-ое уравнения симметрическое,а первое - нет. Система несимметрическая)

$$\begin{cases} x^2 - x + y = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$$

Для решения симметрических систем применяются специфические замены переменных

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = xy; \end{cases}$$

Следует выделить следующие частные случаи

1) $x^2 + y^2$
2) $x^3 + y^3$
3) $x^4 + y^4$
4) $x^8 + y^8$
5) $x^5 + y^5$

Задача

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 21, \\ 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 = 24; \end{cases}$$

Замечание: в ответах симметричных систем числа также симметричны

17. Симметрические системы с модулями (случай с чётными степенями)

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

18. Сложение уравнений, разложенных на сопряжённые множители

$$\begin{cases} (x + xy^2 + y^2)(x + y^2)^2 = 225, \\ (x - xy^2 + y^2)(x + y^2)^2 = 25; \end{cases}$$

19. Сложное деление

$$\begin{cases} 2x^4 = 3x^2y + 20, \\ 3y^2 = 2x^2y - 5; \end{cases}$$

20. Умножение

$$\begin{cases} 2x^4 = 3x^2y + 20, \\ 3y^2 = 2x^2y - 5; \end{cases}$$

21. Метод симметрической подстановки в несимметрическую систему

$$\begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - xy^2 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$$

22. Решение одного уравнения системы относительно промежуточной функции f, не прибегая ко 2-ому

$$\begin{cases} (xy)^2 + xy = 6, \\ (\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y})^3 = 12; \end{cases}$$

23. Разложение на множители путём выделения полного квадрата (чтобы иметь возможность делить)

$$\begin{cases} x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2 = 45, \\ x^2 + 2y^2 + 3xy = 15; \end{cases}$$

24. Метод разложения на множители путём деления многочлена на многочлен

$$\begin{cases} x + xy + xy^2 = 6, \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 12; \end{cases}$$

25. Однородные системы (системы, где хотя бы одно уравнение из двух является однородным, т.е. все слагаемые в нём имеют одинаковую степень)

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \\ y^2 - x^2 = 12; \end{cases}$$

Замечение: Свойство однородности разбивают одно их уравнений системы на множители, а справа находится 0, что позволяет разбить систему на совокупность 2-х систем

26. Почти однородные уравнения (приводимые к однородным)

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80, \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56; \end{cases}$$

27. Однородное 3-ьей степени

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ 2x^2y - xy^2 = 6; \end{cases}$$

28. Приведение к почти-однородным

$$\begin{cases} \frac{3x-9y}{x+y} + \frac{2x+y}{x-y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48; \end{cases}$$

29. Случай, когда общий ответ поглощает частный

Совокупность

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0, \\ x = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ y = x; \end{cases}$$

30. Одинокое квадратное уравнение

$x^2 + 2xy + 4y^2 = 0$