

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

- ЛИСТОК 11

1. Неравенство вида $|a| < b$

$$|a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ a > -b; \end{cases} \Leftrightarrow -b < a < b$$

Задачи

- 1) $|2x - 3| < x - 6$
- 2) $|2x + 5| < 7 - x$
- 3) $|x^2 - 5x| < 6$
- 4) $x^2 + 2|x + 3| - 10 \leq 0$
- 5) $|\frac{3x}{x^2-4}| \leq 1$

2. Неравенство вида $|a| > b$

$$|a| > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b, \\ a < -b; \end{cases}$$

Задачи

- 1) $3x + |2 - x| \geq 5$
- 2) $|3x - 2| + x > 4$
- 3) $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$
- 4) $|x^2 - 1| - 2x > 0$
- 5) $|\frac{2x-1}{x-1}| > 2$

3. Неравенство вида $|a| < -b, b > 0$

$$\begin{cases} |a| < -b, \\ b > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

4. Неравенство вида $|a| > -b, b > 0$

$$\begin{cases} |a| > -b, \\ b > 0; \end{cases} \Leftrightarrow R$$

5. Замена переменной для сведения к квадратному трёхчлену

$$X^2 = |X|^2$$

Задачи

- 1) $x^2 - 5|x| + 4 \leq 0$
- 2) $x^2 + |x| - 6 > 0$
- 3) $\frac{5-|x|}{x^2+|x|-2} \geq \frac{|x|-5}{x^2-1}$

I) способ: полностью решаем для замены - и в конце обратную замену

II) способ: решаем для замены до разложения на множители - и обратная замена

5. Неравенства, содержащие одни только два подмодульных выражения

$$|a| \vee |b| \Leftrightarrow a^2 \vee b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \vee 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) \vee 0$$

Задачи

- 1) $|2x^2 - 3x - 1| > |x^2 - 2x - 1|$

$$2) |x + 3| \leq |2x^2 + x - 5|$$

6. Промежутки (общий метод). В данном метода по очереди рассматриваются все случаи существования модуля

Примечание: числа принято брать 1 раз в квадратные, 1 раз в круглые скобки. Один раз в квадратные брать надо обязательно. Два раза не принято, но - это не ошибка.

Задачи

$$1) |x - 1| + |x + 2| \leq 3$$

$$2) \frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$$

7. Выражение, содержащее переменную под двумя и более модулями

Задачи

$$1) |2x + 1 - |3x + 1|| \leq x + 2$$

$$2) ||x^2 + 3x - 8| - x^2| \geq 8 - x$$

8. Разные неравенства с модулями

$$1) \frac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$$

$$2) \frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{x^2-8x+16}} > 1$$

$$4) x^2 - 8x - \frac{3}{|x-4|} + 18 \leq 0$$

$$5) |x^2 - 9|(x^2 - 7|x| + 10) < 0$$

$$6) \sqrt{x^2 - 4x + 4} + (\sqrt{3x^2 - 5x - 1})^2 \geq 1$$

$$7) |x^2 - 6x + 9| < 2x - 6$$

$$8) |x^2 + 2x| \leq x$$