МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ - ЛИСТОК 10

0. Что можно делать с неравенствами

1) Домножать на положительное число
(знак неравенства прежний)
ax<b, |*c, c>0
cax<bc

2) Делить на положительное число
(знак неравенства прежний)
cax<bc, |:c, c>0
ax<b

3) Домножать на отрицательное число
(знак неравенства меняется на противоположный)
ax<b, |*c, c<0
cax>bc

4) Делить на отрицательное число
(знак неравенства меняется на противоположный)
cax>cb, |:c, c<0
ax<b

5) Возведение в нечётную степень
(знак неравенства прежний)
ax<b
$a^5x^5 < b^5$

6) Извлекаем корни нечётной степени
(знак неравенства прежний)
$a^5x^5 < b^5$
ax<b

7) Возведение в чётную степень - возможно только, если обе части уравнения обязательно больше или равны нулю
(знак неравенства прежний)

$$\begin{cases} ax < b; \\ ax \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x^2 < b^2; \\ ax \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases}$$

8) Извлекаем корни чётной степени - возможно только, если обе части уравнения обязательно больше или равны нулю
При извлечении корня чётных степеней обязательно ставить модуль
(знак неравенства прежний)

$$\begin{cases} a^2x^2 < b^2; \\ a \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |ax| < |b|; \\ a \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases}$$

9) Делить или умножать можно только на выражение постоянного знака, отличное от нуля ($: a^2, *a^2, : \sqrt{a}, *\sqrt{a}$)

10) $A \neq B$ - неравенство

$A * B \neq 0 <\neq>$ совокупности: $a \neq 0$ или $b \neq 0$, потому что

при $a \neq b$ данная совокупонсть $\Leftrightarrow$ R

(множеству всех действительных чисел)

11) Можно прибавлять выражение (число), О.Д.З. которого не уже, чем у исходного неравенства

A>B

A+C>B+C

Например, вот так нельзя!

$x > 5 \Leftrightarrow x + \sqrt{7-x} > 5 + \sqrt{7-x}$

1. Линейные неравенства

x+3>0;

x>-3;

$x \in (-3; \infty+)$

2. I метод решения нелинейных неравенств - обыкновенный метод интервалов

а) Обозначаем О.Д.З.

Замечание: у всех рациональных неравенств О.Д.З. R

б) Раскладываем на множители и 0 справа

в) Расставляем знаки и определяем искомые промежутки

3. Правила чередования знаков

1) Знаки в неравенстве чередуются

2) Первый знак определяется

а) либо подстановкой в неравенство очень большого положительного числа

б) либо перемножением знаков коэффициентов при X

3) Никогда не стоит забывать о возможных одиночных значениях неизвестной величины, если неравенство нестрогое. Если таких значений несколько, то они записываются так: $\{a; b; c\} \cup (...)$

4) В зависимости от поведения квадратичных неравенств, ответ может быть как $\oslash$, так и R

а) $x^2 - 8x + 17 \leq 0$

$D = 64 - 4 * 17 < 0 \Leftrightarrow \oslash$

Ответ: $\oslash$

б) $x^2 + 4x + 7 \geq 0$

$D = 16 - 4 * 17 < 0 \Leftrightarrow \oslash$

Ответ: R

5) Если в качестве множителей выступает выражение в чётной степени или под знаком модуля, то при переходе через это выражение при выставлении знаков знак не меняется

$(x+3)^2 * |x-5| * (x-6) * (13-x) \geq 0$

Ответ: $x \in [6; 13] \cup \{-3; 5\}$

6) Числа типа x^2+5 корней не дают и при случае могут повлиять только на знак. Точно так же, как и $x^2 \pm xy + y^2$ (неполный квадрат)

4. Важные частные случаи

$a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \in R$ (неверно $a \geq 0$)

$a^2 < 0 \Leftrightarrow a \in \oslash$ (неверно $a \leq 0$)

$a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

$a^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 0$

5. Дробно-рациональные неравенства

1) Тут необходимо помнить об О.Д.З. (знаменатель не равен нулю)

$\frac{(x-3)(5-x)}{(x+2)} \geq 0$

2) Следует помнить о возможности повторения множителей в числителе и в знаменателе, что по свойствам равносильно чётной степени (знак не меняется).

$\frac{(x-6)(x+6)}{(x-6)(x-3)} \leq 0$

Также следует помнить о том, что в таких случаях корень соответствующих чисел не равен нулю.

3) Ответ может быть записан в виде двойных неравенств

Ответ: $x \in (-5; \frac{1}{2}) \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$ равносилен

$-5 < x < \frac{1}{2}, x \geq 2, x \neq 3$ или

$-5 < x < \frac{1}{2}, 2 \leq x < 3, x > 3$

6. Системы и совокупности неравенств

1) Решая систему неравенств с одной переменной, находим пересечение промежутков, предварительно решив каждое неравенство системы

Задача:

$y = \frac{x-13}{x^2+x-6}, 0 \leq y \leq 1$, что означает

2) Решая совокупность неравенств с одной переменной, находим объединение промежутков, решив каждое неравенство в отдельности

$9x^2 - 4x - 5 < 0$

$\frac{5x-2}{3-2x} \leq 1$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

3) Следует помнить о вырожденных случаях

а) $\begin{cases} x - 3 > 0, \\ R; \end{cases}$ решениями служат решения первого неравенства

б) $\begin{cases} x - 3 > 0, \\ \oslash; \end{cases}$ Решение: $\oslash$

в)

x-3>0

R

Решение: R

г)

x-3>0

$\oslash$

Решениями служат решения первого неравества

4) Задания с экстремальными значениями

а) $max\{\frac{1}{x}; 5x - 4\} \geq x^2$

или

найдите все значения X при которых большее из двух выражений $\frac{1}{x}$ и $5x-4$ не меньше, чем x^2

б) $min\{1-x^2; \frac{1-x}{2}\} \geq \frac{1}{2}$

или

найдите все значения X при которых меньшее из двух выражений $1-x^2$ и $\frac{1-x}{2}$ не меньше, чем $\frac{1}{2}$

в) $max\{x^2+2x; \frac{-x}{2}\} \leq \frac{1}{2}$

или

найдите все значения X при которых большее из двух выражений x^2+2x и $\frac{-x}{2}$ не больше, чем $\frac{1}{2}$

г) $min\{x^2-2x-3; x-3\} \leq -4$

или

найдите все значения X при которых меньшее из двух выражений x^2-2x-3 и $x-3$ не больше, чем -4

7. Общий метод интервалов

1) Определить О.Д.З.

2) Найти корни

3) Нанести корни на О.Д.З. и подсчитать знак в каждом интервале

8. По смыслу неравенства

Если неравенство состоит из произведения ОЧЕНЬ !!! сложных функций и это произведение сравнивается с нулём, то имеют место отношения:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$$

9. Основные опорные неравенства

1) Неравенство о двух взаимообратных числах $|a+\frac{1}{a}| \geq 2$

$$|a+\frac{1}{a}| \geq 2$$

$$|a+\frac{1}{a}| = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

2) Неравенство Коши $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Обобщение $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

3) Неравенство Треугольника $|a+b| \leq |a|+|b|$

Обобщение $|a_1+a_2+...+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+...+|a_n|$

4) $a^2+b^2 \geq 2ab$

5) $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$