

# УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЯМИ - ЛИСТОК 9

## 1. Определение модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

## 2. Свойства модуля

а)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

б)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

в)  $|a + b| \leq |a| + |b|$

г)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

д)  $|a| = |-a|$

е)  $|a|^2 = a^2$

ж)  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

з)  $|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$

## 3. Когда знак модуля в уравнении один

Алгоритм

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0; \\ \left\| \begin{array}{l} a = b; \\ a = -b; \end{array} \right. \end{cases}$$

1)  $|2x - 1| = 5$

2)  $|2 - 3x| = 1$

3)  $|1 - 2x - x^2| = 1$

4)  $|2x - 5| = x - 1$

5)  $|x + 2| = 2(3 - x)$

6)  $|x^2 + 4x + 2| = \frac{5x+16}{3}$

7)  $|1 + x - x^2| + 4 = 2x^2 + x$

8)  $|3x^2 + 5x - 4| = 2x - 1$

9)  $|x - 2| = 2 - x$

10)  $|x^2 - x - 2| = x + 2 - x^2$

## 3. Замена переменной для приведения к квадратному уравнению

$$x^2 = |x^2|$$

1)  $x^2 - 7|x| + 6 = 0$

2)  $(x + 3)^2 - |x + 3| - 30 = 0$

3)  $x^2 + 2x + 2|x + 1| = 7$

4)  $4x^2 - 12x - 5|2x - 3| + 15 = 0$

5)  $x^4 + 4x^3 = 30 - 7|x^2 + 2x| - 4x^2$

#### 4. Когда модуль равен модулю

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b; \\ a = -b; \end{cases}$$

Толкование:

1 способ: по схеме задачи I

2 способ: Возведение в квадрат и - разность квадратов.

1)  $|3x^2 - 3x + 5| = |2x^2 + 6x - 3|$

2)  $|x + 5| - |x - 3| = 8$

3)  $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$

4)  $x^2 - 5x - 6 \frac{|x|}{x} = 0$

5)  $x^2 - 4x \frac{|x-\pi|}{x-\pi} + 2 = 0$

#### 5. Общий тип уравнения с модулем

Замечание1: желательно до начала решения сделать, если надо  $|b - ax| = |ax - b|$  для удобства в раскрытии модулей

Замечание2: если решения, найденные на данном промежутке, к нему не принадлежат, то в ответ они не включаются

1)  $|2x + 1| + |5 - 3x| + 1 - 4x = 0$

#### 6. Модуль внутри модуля

$$||a|| = c \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq 0; \\ |a| = c; \\ |a| = -c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq 0; \\ |a| = c; \\ |a| = -c; \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq 0; \\ a = c; \\ a = -c; \end{cases}$$

1)  $||x - 1| - 3| = 2$

#### 7. Дробно-рациональные уравнения с модулями

1) Найти сумму целых решений

$$\frac{5 - |6 - x| - |x - 1|}{|x^2 - 9x + 18|} = 0$$

8. Следует помнить и об известной разнице между  $\sqrt{x^2}$  и  $(\sqrt{x})^2$

1)  $x^2 + \sqrt{x^2} - 2 = 0$

2)  $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 2 = 0$

9. Не обращать внимания на МНИМОЕ СХОДСТВО частей уравнения, решать по стандартной схеме

1)  $|x^2 - 1| + x + 1 = 0$

10. Решение уравнений с двойными модулями общим методом

1)  $||2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$