РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ - ОБЩИЙ ВИД

Листок 7

1. Выделение полного куба

Квадратные уравнения решаются выделением полного квадрата, попробуйте решить уравнения 3-ей степени выделением полного куба.

2. Метод Тартальи-Кардано и комплексные числа

Дано уравнение 3-ей степени

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x^1 + A_3 = 0$$

Цель: Суть метода Тартальи -избавиться от слагаемого при x^2, чтобы кубическое уравнение стало неполным

Подсказки:

1) Сделать уравнение приведённым (поделить на коэффициент при старшей степени)

2) Сделать замену $x = y + h$, подберите h так, чтобы слагаемое при y^2 занулилось

3) Сделать двупараметрическую замену $y = \alpha + \beta$ и после упрощений положить $3\alpha\beta + p = 0$

4) А полученную систему уравнений решить по теореме Виетта

3. Метод Феррари

Дано уравнение 4-ой степени

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x^1 + A_4 = 0$$

Цель: выделить полный квадрат

Подсказки:

1) Сделать уравнение приведённым (поделить на коэффициент при старшей степени)

$$x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x^1 + B_4 = 0$$

2) Сделать замену $x = y + h$, подберите h так, чтобы слагаемое при y^3 занулилось

$$y^4 + py^2 + qy^1 + r = 0$$

3) Выделить полный квадрат из слагаемых, содержащих y^4 и y^2

4) Добавим искусственный параметр α так, чтобы выделенный нами на предыдущем шаге полный квадрат был х-ом в формуле $x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$

5) Вновь получившийся полный квадрат = квадратному трёхчлену относительно y, подберите α так, чтобы стоящий справа квадратный трёхчлен был полным квадратом

6) Задача подбора α сводится к кубическому уравнению и решается по Формулам Тартальи-Кардано

7) Подобрав такое α имеем равенства двух квадратов, из этого получаем разность квадратов

4. Теорема Гаусса (Основная теорема алгебры)

Всякий отличный от константы многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Следствие: в виду теоремы Безу, которая позволяет поделить нацело многочлен на (x-корень) и получит в частном многочлен на единицу меньшей степени можно утверждать, что всякой уравнение n-ой степени имеет ровно n корней над полем комплексных чисел.

5. Теоремы Абеля-Галуа

Корни уравнения степени выше 4-ой нельзя выразить в общем случае с помощью операций: $+$, -, *, $/$, $\sqrt[n]{a}$