РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Листок 6

1. Группировка
1) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
2) $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$
3) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$
4) $x^3 - x^2 - 81x + 81 = 0$
5) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$
6) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$
7) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$
8) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$
9) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$

2. Раскрытие квадратов
$(x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12$

3. Сворачивание кубов
1) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
2) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

4. Разложение на множители квадратных трёхчленов
1) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 9x)(x^2 + 2x - 8)$
2) $(x^2 + 5x)(x^2 - 3x - 28) = (x^3 - 16x)(x^2 - 2x - 35)$

5. Перемножалка
1) $(x^2 - 3x)(x-1)(x-2) = 24$
2) $(x^2 - 5x)(x+3)(x-8) + 108 = 0$
3) $(x+4)^2(x+10)(x-2) + 243 = 0$
4) $x(x+3)(x+5)(x+8) + 56 = 0$
5) $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 1680$
6) $(x-2)(x-3)^2(x-4) = 20$
7) $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1) = 24$

6. Биквадратные уравнения
1) $25x^4 + 66x^2 - 27 = 0$
2) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

7. Разбиение отдельных членов на слагаемые (как буквенных, так и числовых)
1) $x^3 + 1991x + 1992 = 0$
2) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$
3) $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$
4) $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$
5) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

8. Возвратные уравнения 4-ой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

если $\frac{e}{a} = (\frac{d}{b})^2$, то делим уравнение на x^2 и делаем замену

1) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$
2) $18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$

9. Однородные уравнения

Однородные уравнения - это уравнения, все члены которых имеют одинаковую степень,а справа 0.

Уравнение вида $Au^2+Buv+Cv^2 = 0$ называется однородным уравнением II-ой степени относительно U и V.

Проверяем возможность деления на U и V.
Делим на $U^2(V^2)$
$AU^2 + BUV + CV^2 = 0$ делим на $U^2(U! = 0)$, получаем
$A + \frac{BV}{U} + \frac{CV^2}{U^2} = 0$
Пусть $\frac{V}{U} = y$, тогда $\frac{V^2}{U^2} = y^2$, получаем ур-ие:
$A + By + Cy^2 = 0$
Обратная замена
Задачи на однородные уравнения
1) $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$
2) $2(x - 1)^4 - 5(x^2 - 3x + 2)^2 + 2(x - 2)^4 = 0$

10. Теорема Безу и деление в столбик многочленов

Формулировка:

При делении многочлена n-ой степени относительно x, расположенного по убывающим степения x, на двучлен (x-a) остаток от деления равени значению делимого при x=a

Доказательство:

Поделим многочлен P(x) на (x-a), получим P(x)=(x-a)Q(x)+R(x), но R(x) имеет степень меньше многочлена (x-a) в силу того, что R(x) - остаток. (иначе кусок R(x) можно было бы включить в Q(x). А значит R(x) - просто число. Подставляем x=a в формулу P(x)=(x-a)Q(x)+R(x), получаем P(a)=(a-a)Q(x)+R=R, теорема доказана

Задача 1

Найти остаток от деления $x^3 + 5x^2 - 6x - 6 = 0$ на двучлен (x-2)
а) уголком
б) по теореме Безу

Следствия из теоремы Безу

I. Если многочлен делится без остатка на (x-a), то a-корень этого многочлена

II. Если a-корень многочлена, то он обязательно делится без остатка на (x-a)

Задача 2

Используя Следствие II из теоремы Безу решить следующие задачи (разложить на множители) ИЗ ПЕРВОГО ЛИСТКА
1) $(x^2 + 2xy + y^2)$
2) $(x^2 - 2xy + y^2)$
3) $(x^2 - y^2)$
4) $(x^3 - y^3)$
5) $(x^3 + y^3)$

6) $(x^5 - y^5)$
7) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

11. Рациональные корни многочлена

Формулировка

В многочлене вида $A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1x^1 + A_0 = 0, A_n! = 0$

Рациональные корни следует искать только среди чисел вида $+$ или - $\frac{B_0}{B_n}$, где B_0 - делитель A_0 и B_n - делитель A_n

Доказательство

Лемма 1

Если приведенное уравнение $x^n + k_{n-1}x^{n-1} + ... + k_1x^1 + k_0 = 0$ имеет целый корень, то он обязательно будет делителем свободного члена k_n

Лемма 2

Приведенное уравнение $x^n + k_{n-1}x^{n-1} + ... + k_1x^1 + k_0 = 0$ не может иметь ни одного дробного корня.

Задача 1

Найти рациональные корни многочленов
1) $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$
2) $x^3 - 3x - 2 = 0$

Задача 2

Решить уравнения УГОЛКОМ
1) $x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0$
2) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$
3) $x^4 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

12. Схема Горнера [нахождение остатка от деления многочлена P(x) на (x-a) без самого деления)]

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

13. Деление на x^2

1) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$
2) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$

14. Обобщённая Теорема Виетта

15. Замена

1) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$
2) $(x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$
3) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$
4) $(x^2 - 3x)^2 - 14x^2 + 42x + 40 = 0$

16. Сдвиг оси

$(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$

17. Уравнение с параметрами

$x^4 - 3x^2 + 2(a - 1)x + 2a - a^2 = 0$

18. Неполная замена аргументов

$(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0$

19. Сворачивание биномиальных формул

$x^5 - 35x^4 + 490x^3 - 3430x^2 + 12005x - 16807 = 0$

20. Нахождение иррациональных корней с допущениями

$3x^3 + 5x^2 - 9x - 2 = 0$

21. Тригонометрическая подстановка: сколько корней имеет уравнение на отрезке по x: [0;1]

$8x(1-2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$

22. Уравнения с иррациональными коэффициентами

$2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} = 0$

23. Использование Бинома Ньютона

1) $(x+2)^3 + x^2 = 28$

2) $x^4 + (x-1)^4 = 17$

24. Подстановка среднего арифметического

$(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$

25. Подстановка среднего арифметического и доказательство о несуществовании корней

$x^5 + (x-2)^5 = 32$