

КВАДРАТ СУММЫ

Листок 2

1. Докажите равенство геометрически

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Подсказки:

1) рассмотрите квадрат со стороной $a + b$ и посчитайте его площадь двумя способами: целиком и по частям

2. Докажите равенство геометрически

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

3. Найдите, чему равно $(a + b)^4 =$

Наблюдение:

Заметьте себе, что геометрический смысл равенства для четвёртой степени - это объём четырёхмерного куба. Там наше воображение отказывается нам помогать, а алгебраически по-прежнему можно посчитать!

4. Выпишите друг под другом разложения 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой и 5-ой степеней суммы двух слагаемых

1) Поймите закономерность поведения коэффициентов указанных разложений (Для этого ещё раз выпишите отдельно только коэффициенты указанных разложений).

2) Поймите, как ведут себя степени указанных разложений.

5. Используя обнаруженные закономерности выпишите разложения

1) $(a + b)^6 = \dots$

2) $(a - b)^7 = \dots$

Замечание:

разложения вида $(a + b)^n = \dots$ называется БИНОМ НЬЮТОНА

6.(*). Докажите, ПОЧЕМУ закономерности из пункта 4) РАБОТАЮТ

7.(*). Подсчитать сумму биномиальных коэффициентов в разложении Бинома Ньютона (когда имеется в виду сумма в n -ой степени)

8.(*). Докажите, что сумма коэффициентов на чётных местах равна сумме коэффициентов на нечётных местах

9. Докажите прямую теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы (самой длинной его стороны) равен сумме квадратов катетов

Указание: смотри! рис 1.

10. (*) Докажите обратную теорему Пифагора: если квадрат гипотенузы равна сумме квадратов катетов, то треугольник прямоугольный

Замечание: Эта теорема нужна, чтобы строить прямой угол в природе. Например, достаточно взять 3 палки с длинами 3,4,5, тогда $3^2 + 4^2 = 5^2$. И получится прямой угол.

11. Целые числа, удовлетворяющие равенству $x^2 + y^2 = z^2$ называются пифагоровы тройки

Пифагоровы тройки можно получить из следующего равенства, подставляя различные m и n

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

12. (*) (*) Великая теорема Ферма

а) $x^3 + y^3 = z^3$, не имеет решений в целых числах

б) $x^4 + y^4 = z^4$, не имеет решений в целых числах

в) $x^n + y^n = z^n$, где $n > 2$ не имеет решений в целых числах

13. Рождение иррациональных чисел

Рассмотрите квадрат со стороной один. Найдите длину его диагонали. Докажите, что длина диагонали квадрата - число иррациональное (не представимо в виде $\frac{p}{q}$, где p - целое, q - натуральное)

14. (*) Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении

а) $(\sqrt{2} + 3^{\frac{1}{4}})^{100} = \dots$

б) $(\sqrt{2} + 3^{\frac{1}{3}})^{300} = \dots$

15. (*)

Доказать, что значение выражения $96^7 - 22^5 - 48^6$ кратно 10.