

Распределительный закон для чисел

Листок 1

1. (!!!) Докажите, обоснуйте равенство

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

Подсказки:

1) подставьте числа вместо букв и поймите, что происходит с числами

Подсказка: Подставьте, например, $(5+3)*7=5*7+3*7$ и поймите смысл указанного равенства

2) поймите геометрический смысл доказываемого равенства.

Подсказка: Подсчитайте площадь прямоугольника со сторонами $B+C$ и A двумя способами (целиком и по частям)

Примечание:

Указанное равенство лежит в основе ВСЕХ формул школьной алгебры и иначе ещё называется "правило раскрытия скобок". Можно ещё помнить это так: мама "а" кормит каждого сына "b" и "с"

2. Раскрыть скобки

1) $5x(x - 2) = \dots$

2) $(x^2 + 3xy)(2 + 7x + y) = \dots$

3. Разложение на множители=приведение подобных

1) $7x - 3x = \dots$ (этот вид разложения называется «приведение подобных слагаемых», «подобными» называются одночлены с одинаковой буквенной частью)

2) $55x^{127}yz^2 - 8z^2yx^{127} + yz^2x^{127} = \dots$

4. Привести подобные слагаемые

1) $2a + b - a + 10b + 1 = \dots$

2) $7x - 2y = \dots$ (если буквенная часть не совпадает, то складывать нельзя)

3) $5a^2b + 7 + x^2y - 8ba^2 + 10xy = \dots$

5. Раскрытие скобок и приведение подобных

1) $(2a + b)(5b - 8a) = \dots$

2) $(-2a + b - 2ab)(11a - 3ab) = \dots$

6. Разложение на множители

1) $5x^2y + 2yx^2z = \dots$

2) $8a^2b^3c + 3a^2cb^2 - b^3a^2c = \dots$

3) $a^{-5} + a^{-3} = \dots$

7. Метод группировки для разложения на множители

1) $ax + 2yb + xb + 2ya = \dots$

2) $14xy - 15 - 21x + 10y = \dots$

3) $2az + z - 4a + zb - 2 - 2b = \dots$

8. (!!!) Квадрат суммы и разности (разложить на множители методом группировки)

1) $x^2 + 2xy + y^2 = \dots$

2) $x^2 - 2xy + y^2 = \dots$

3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \dots$

9. Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для разложения на множители: надо прибавить и отнять одно и то же искусственно придуманное слагаемое, чтобы с ними возможно было проделать обычный метод группировки

- 1) (!!!) $x^2 - y^2 = \dots$ (Разность квадратов)
- 2) (!!!) $x^3 - y^3 = \dots$ (Разность кубов)
- 3) (!!!) $x^3 + y^3 = \dots$ (Сумма кубов)
- 4) (*) $x^5 - y^5 = \dots$ (Разность пятых степеней)

10. Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

1) Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$$

например, вот так:

$$(17^2 + 3^2)(8^2 + 11^2) = 103^2 + 211^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + 2 * a * b + b^2 = (a + b)^2$$

2) (*) Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$$

3) (***) Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + u^2 + t^2 + s^2)(x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + k^2 + j^2 + n^2 + m^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2 + (?_5)^2 + (?_6)^2 + (?_7)^2 + (?_8)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a + b + c + d + e + f + g + h)^2 = \dots$$

Примечание 1:

Для 16-и квадратов неверно.

Примечание 2:

Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помощью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.

Примечание 3:

Теорема о невозможности 16-и: теорема Фробениуса

11. Куб суммы и разности

1)(!!!) $x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3 = \dots$

2)(!!!) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = \dots$

12. Некоторые более сложные примеры

Разложить на множители

1)(*) $x^4 + 4 = \dots$

2)(*) $2bc + a^2 - b^2 - c^2 = \dots$

3)(*) $x^4 - 21x^2 + 4 = \dots$

4(**) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \dots$

5)(*) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = \dots$

6)(*) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = \dots$

7)(*) $a^4 - 2a^3 + a^2 - 1 = \dots$

8)(*) $c^8 - c^4 - 2c^2 - 1 = \dots$

9)(*) $8x^3 + y^3 + 6y^2 + 12y + 8 = \dots$

13. Волшебный автомат

В четырёх ячейках памяти игрового автомата записаны числа a , b , c , d . Автомат может сложить или вычесть два числа (бесплатно) или перемножить их (за 1 рубль); результат он записывает в новую ячейку. Может ли игрок, потратив всего три рубля, добиться того, что каких-то трёх ячейках будут записаны числа $2(ab+cd)$, $2(ac+bd)$ и $2(ad+bc)$? (Исходные числа игроку неизвестны).

ЗАМЕЧАНИЕ: Нельзя разложить на множители выражения следующего вида

1) $a + b$

2) $a - b$

3) $a^2 + b^2$ (сумму квадратов и вообще сумму чётных степеней)

4) $a^2 + ab + b^2$ (неполный квадрат суммы)

5) $a^2 - ab + b^2$ (неполный квадрат разности)

6) $a^2 + b^3$