

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

- ЛИСТОК 10

0. Что можно делать с неравенствами

1) Домножать на положительное число

(знак неравенства прежний)

$$ax < b, | *c, c > 0$$

$$cax < bc$$

2) Делить на положительное число

(знак неравенства прежний)

$$cax < bc, |:c, c > 0$$

$$ax < b$$

3) Домножать на отрицательное число

(знак неравенства меняется на противоположный)

$$ax < b, | *c, c < 0$$

$$cax > bc$$

4) Делить на отрицательное число

(знак неравенства меняется на противоположный)

$$cax > bc, |:c, c < 0$$

$$ax < b$$

5) Возведение в нечётную степень

(знак неравенства прежний)

$$ax < b$$

$$a^5 x^5 < b^5$$

6) Извлекаем корни нечётной степени

(знак неравенства прежний)

$$a^5 x^5 < b^5$$

$$ax < b$$

7) Возведение в чётную степень - возможно только, если обе части уравнения обязательно больше или равны нулю

(знак неравенства прежний)

$$\begin{cases} ax < b; \\ ax \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 x^2 < b^2; \\ ax \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases}$$

8) Извлекаем корни чётной степени - возможно только, если обе части уравнения обязательно больше или равны нулю

При извлечении корня чётных степеней обязательно ставить модуль

(знак неравенства прежний)

$$\begin{cases} a^2 x^2 < b^2; \\ a \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |ax| < |b|; \\ a \geq 0; \\ b \geq 0; \end{cases}$$

9) Делить или умножать можно только на выражение постоянного знака, отличное от нуля ($: a^2, *a^2, : \sqrt{a}, *\sqrt{a}$)

10) $A \neq B$ - неравенство

$A * B \neq 0 <\neq>$ совокупности: $a \neq 0$ или $b \neq 0$, потому что

при $a \neq b$ данная совокупность $\Leftrightarrow \mathbb{R}$

(множеству всех действительных чисел)

11) Можно прибавлять выражение (число), О.Д.З. которого не уже, чем у исходного неравенства

$$A > B$$

$$A + C > B + C$$

Например, вот так нельзя!

$$x > 5 \Leftrightarrow x + \sqrt{7-x} > 5 + \sqrt{7-x}$$

1. Линейные неравенства

$$x + 3 > 0;$$

$$x > -3;$$

$$x \in (-3; \infty +)$$

2. I метод решения нелинейных неравенств - обыкновенный метод интервалов

а) Обозначаем О.Д.З.

Замечание: у всех рациональных неравенств О.Д.З. \mathbb{R}

б) Раскладываем на множители и 0 справа

в) Расставляем знаки и определяем искомые промежутки

3. Правила чередования знаков

1) Знаки в неравенстве чередуются

2) Первый знак определяется

а) либо подстановкой в неравенство очень большого положительного числа

б) либо перемножением знаков коэффициентов при X

3) Никогда не стоит забывать о возможных одиночных значениях неизвестной величины, если неравенство нестрогое. Если таких значений несколько, то они записываются так: $\{a; b; c\} \cup (...)$

4) В зависимости от поведения квадратичных неравенств, ответ может быть как \emptyset , так и \mathbb{R}

а) $x^2 - 8x + 17 \leq 0$

$$D = 64 - 4 * 17 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Ответ: \emptyset

б) $x^2 + 4x + 7 \geq 0$

$$D = 16 - 4 * 7 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Ответ: \mathbb{R}

5) Если в качестве множителей выступает выражение в чётной степени или под знаком модуля, то при переходе через это выражение при выставлении знаков знак не меняется

$$(x + 3)^2 * |x - 5| * (x - 6) * (13 - x) \geq 0$$

Ответ: $x \in [6; 13] \cup \{-3; 5\}$

6) Числа типа $x^2 + 5$ корней не дают и при случае могут повлиять только на знак. Точно так же, как и $x^2 \pm xy + y^2$ (неполный квадрат)

4. Важные частные случаи

$$a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \in R \text{ (неверно } a \geq 0)$$

$$a^2 < 0 \Leftrightarrow a \in \emptyset \text{ (неверно } a \leq 0)$$

$$a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

$$a^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 0$$

5. Дробно-рациональные неравенства

1) Тут необходимо помнить об О.Д.З. (знаменатель не равен нулю)

$$\frac{(x-3)(5-x)}{(x+2)} \geq 0$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2) \cup [3; 5]$$

2) Следует помнить о возможности повторения множителей в числителе и в знаменателе, что по свойствам равносильно чётной степени (знак не меняется).

$$\frac{(x-6)(x+6)}{(x-6)(x-3)} \leq 0$$

$$\text{Ответ: } x \in [-6; 3)$$

Также следует помнить о том, что в таких случаях корень соответствующих чисел не равен нулю.

3) Ответ может быть записан в виде двойных неравенств

$$\text{Ответ: } x \in (-5; \frac{1}{2}) \cup [2; 3) \cup (3; +\infty) \text{ равносильно}$$

$$-5 < x < \frac{1}{2}, x \geq 2, x \neq 3 \text{ или}$$

$$-5 < x < \frac{1}{2}, 2 \leq x < 3, x > 3$$

6. Системы и совокупности неравенств

1) Решая систему неравенств с одной переменной, находим пересечение промежутков, предварительно решив каждое неравенство системы

Задача:

$$y = \frac{x-13}{x^2+x-6}, 0 \leq y \leq 1, \text{ что означает}$$

$$\begin{cases} \frac{x-13}{x^2+x-6} \geq 0, \\ \frac{x-13}{x^2+x-6} \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-13}{(x+3)(x-2)} \geq 0, \\ \frac{x-13-x^2-x+6}{(x+3)(x-2)} \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-13}{(x+3)(x-2)} \geq 0, \\ \frac{x^2+7}{(x+3)(x-2)} \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in [13; +\infty) \text{ или } x \geq 13$$

2) Решая совокупность неравенств с одной переменной, находим объединение промежутков, решив каждое неравенство в отдельности

$$9x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$\frac{5x-2}{3-2x} \leq 1$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

3) Следует помнить о вырожденных случаях

$$\text{а) } \begin{cases} x-3 > 0, \\ R; \end{cases} \text{ решениями служат решения первого неравенства}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x-3 > 0, \\ \emptyset; \end{cases} \text{ Решение: } \emptyset$$

в)

$$x-3 > 0$$

R

Решение: R

г)

$$x-3 > 0$$

○

Решениями служат решения первого неравенства

4) Задания с экстремальными значениями

а) $\max\{\frac{1}{x}; 5x - 4\} \geq x^2$

или

найдите все значения X при которых большее из двух выражений $\frac{1}{x}$ и $5x - 4$ не меньше, чем x^2

б) $\min\{1 - x^2; \frac{1-x}{2}\} \geq \frac{1}{2}$

или

найдите все значения X при которых меньшее из двух выражений $1 - x^2$ и $\frac{1-x}{2}$ не меньше, чем $\frac{1}{2}$

в) $\max\{x^2 + 2x; \frac{-x}{2}\} \leq \frac{1}{2}$

или

найдите все значения X при которых большее из двух выражений $x^2 + 2x$ и $\frac{-x}{2}$ не больше, чем $\frac{1}{2}$

г) $\min\{x^2 - 2x - 3; x - 3\} \leq -4$

или

найдите все значения X при которых меньшее из двух выражений $x^2 - 2x - 3$ и $x - 3$ не больше, чем -4

7. Общий метод интервалов

1) Определить О.Д.З.

2) Найти корни

3) Нанести корни на О.Д.З. и подсчитать знак в каждом интервале

8. По смыслу неравенства

Если неравенство состоит из произведения ОЧЕНЬ !!! сложных функций и это произведение сравнивается с нулём, то имеют место отношения:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, & \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, & \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

9. Основные опорные неравенства

1) Неравенство о двух взаимнообратных числах $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$

$$|a + \frac{1}{a}| \geq 2 \Leftrightarrow (a + \frac{1}{a})^2 \geq 4 \Leftrightarrow a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow (a - \frac{1}{a})^2 \geq 0$$

$$|a + \frac{1}{a}| = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

2) Неравенство Коши $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

3) Неравенство Треугольника

4) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

5) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$