

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ - ЛИСТОК 8

1. Общий метод решения

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Подробный алгоритм

1) Правильно списать пример

$$\frac{2x+2}{x^2-4x-5} - \frac{4}{x+5} = \frac{-3}{25-x^2}$$

2) Перенести все слагаемые влево ...=0

$$\frac{2x+2}{x^2-4x-5} - \frac{4}{x+5} + \frac{3}{25-x^2} = 0$$

3) Разложить каждый знаменатель на множители

$$\frac{A}{\text{()()}} + \frac{B}{\text{()()}} + \dots = 0$$

$$\frac{2x+2}{(x-5)(x+1)} - \frac{4}{x+5} + \frac{3}{(5-x)(5+x)} = 0$$

4) Разложить числитель на множители и
сократить где это возможно со знаменателями

$$\frac{2(x+1)}{(x-5)(x+1)} - \frac{4}{x+5} + \frac{3}{(5-x)(5+x)} = 0$$

5) Сделать множители в знаменателях одинаковыми

$$\frac{2}{x-5} - \frac{4}{x+5} - \frac{3}{(x-5)(5+x)} = 0$$

6) Составить общий знаменатель
и найти дополнительный множитель каждому числителю

$$\frac{2(x+5)-4(x-5)-3 \cdot 1}{(x-5)(x+5)} = 0$$

7) Раскрыть скобки в числителе
и привести подобные слагаемые

$$\frac{2x+10-4x+20-3}{(x-5)(x+5)} = 0$$

8) Разложить числитель на множители
и сократить со знаменателем

$$\frac{-2x+27}{(x-5)(x+5)} = 0$$

9) Применить условие равенства дроби 0

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 27 = 0, (1), \\ (x - 5)(x + 5) \neq 0. (2) \end{cases}$$

10) Решить уравнение

$$\begin{aligned} -2x + 27 &= 0 \\ -2x &= -27 \\ x &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

11) Проверить полученные корни уравнения
на выполнения условия (2)

при $x = \frac{27}{2}$ условие
 $(x - 5)(x + 5) \neq 0$ выполнено

12) Записать ответ

Ответ: $\frac{27}{2}$;

2. Решить дробно-рациональное уравнение

1) $\frac{x^2-2x}{x-1} - \frac{2x-1}{1-x} = 3$

Ответ: 2;

1.5) $\frac{2x-5}{x+5} + \frac{3x+4}{x+2} = 1$

Ответ: 0; $-\frac{11}{4}$

2) $\frac{2x-5}{3x+1} + \frac{21x+7}{2x-5} = 8$

Ответ: -6; $-\frac{12}{19}$

2.5) $\frac{x^2-2x}{4x-3} + 5 = \frac{16x-12}{2x-x^2}$

Ответ: 1; -3; $-7 \pm \sqrt{61}$

3) $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$

Ответ: 0; -6;

3.5) $\frac{30}{x^2-1} + \frac{7-18x}{x^3+1} = \frac{13}{x^2-x+1}$

Ответ: 4; -9;

4) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{1-x}$

Ответ: 0;

4.5) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$

Ответ: -8;

5) $\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} = 1$

Ответ: -7; 2;

5.5) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$

Ответ: 0; -3; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$

6) $\frac{24x}{2x^2-3x+4} = \frac{12x}{x^2+x+2} + 5$

Сокращаем дроби на x (числитель и знаменатель)

$$\frac{24x}{2x^2-3x+4} = \frac{24}{2x-3+\frac{4}{x}}$$

$$\frac{24x}{2x^2-3x+4} = \frac{24}{2x-3+\frac{4}{x}}$$

Замена $x + \frac{2}{x} = t$

Ответ: 1; 2.

6.5) $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$

Ответ: $-\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

7) $(\frac{x+1}{x-2})^2 + \frac{x+1}{x-4} = 12 * (\frac{x-2}{x-4})^2$

Делим на $(\frac{x-2}{x-4})^2$ обе части

Делаем замену $t = \frac{(x+1)(x-4)}{(x-2)^2}$

Ответ: 3, $\frac{4}{5}$

8) $\frac{3}{x^2-4x+1} - x^2 = 3 - 4x$

Ответ: 0; 2; 4;

9) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}$

Ответ: $7 \pm \sqrt{34}$;

3. Выделение целой части

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$$

Ответ: 0; $-\frac{5}{2}$

4. Использование МНК (метода неопределённых коэффициентов) для разбиения слагаемого

$$\frac{x+6}{x-6} * \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6} * \left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 = 2 * \frac{x^2+36}{x^2-36}$$

Указание:

Разбить $2 * \frac{x^2+36}{x^2-36} = \frac{\alpha x + \beta}{x-6} + \frac{\gamma x + \theta}{x+6}$

и положить для симметрии $\alpha = \gamma = 1$

Ответ: $0; \frac{6+\sqrt{936}}{5}$