РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Листок 6

1. Группировка

1) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
Ответ: $2; -2; -1;$
2) $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$
Ответ: $-1;$
3) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$
Ответ: $-2; 1;$
4) $x^3 - x^2 - 81x + 81 = 0$
Ответ: $-9; 1; 9;$
5) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$
Ответ: $-3; 4; -4;$
6) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$
Ответ: $-2; -\frac{3}{2};$
7) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$
Ответ: $-\frac{2}{3}; \frac{1}{2};$
8) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$
Ответ: $-3;$
9) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$
Ответ: $\frac{1}{2};$

2. Раскрытие квадратов

$(x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12$
Ответ: $1; 1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3};$

3. Сворачивание кубов

1) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
Ответ: $-\frac{1}{4};$
2) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
Ответ: $\frac{1}{6};$

4. Разложение на множители квадратных трёхчленов

1) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 9x)(x^2 + 2x - 8)$
Ответ: $0; -4; 2; -3; 4;$
2) $(x^2 + 5x)(x^2 - 3x - 28) = (x^3 - 16x)(x^2 - 2x - 35)$
Ответ: $0; -5; 7; -3; 4;$

5. Перемножалка

1) $(x^2 - 3x)(x-1)(x-2) = 24$
Ответ: $-1; 4;$
2) $(x^2 - 5x)(x+3)(x-8) + 108 = 0$
Ответ: $-1; 6; \frac{5+\sqrt{97}}{2}; \frac{5-\sqrt{97}}{2};$
3) $(x+4)^2(x+10)(x-2) + 243 = 0$
Ответ: $-1; -7; -4+3\sqrt{3}; -4-3\sqrt{3};$
4) $x(x+3)(x+5)(x+8) + 56 = 0$

Ответ: $-1; -7; -4+2\sqrt{2}; -4-2\sqrt{2}$;
5) $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=1680$
Ответ: $-2; 11$;
6) $(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$
Ответ: $3+\sqrt{5}; 3-\sqrt{5}$;
7) $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)=24$
Ответ: $0; 5$;

6. Биквадратные уравнения

1) $25x^4+66x^2-27=0$
2) $x^6+9x^3+8=0$

7. Разбиение отдельных членов на слагаемые (как буквенных, так и числовых)

1) $x^3+1991x+1992=0$
Ответ: -1;
2) $x^3-3x^2+2=0$
Ответ: $1; 1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}$;
3) $x^4-x^3-13x^2+x+12=0$
Ответ: $-1; 4; -3$;
4) $x^3+4x^2-5=0$
Ответ: $1; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$;
5) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$
Ответ: $-1; 1; 3; -2$;

8. Возвратные уравнения 4-ой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

если $\frac{e}{a}=(\frac{d}{b})^2$, то делим уравнение на x^2 и делаем замену
1) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$
Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}$;
2) $18x^4-3x^3-25x^2+2x+8=0$
Ответ: $\frac{-1+\sqrt{97}}{12}; \frac{-1-\sqrt{97}}{12}; 1; -\frac{2}{3}$;

9. Однородные уравнения

Однородные уравнения - это уравнения, все члены которых имеют одинаковую степень,а справа 0.

Уравнение вида $Au^2+Buv+Cv^2=0$ называется однородным уравнением II-ой степени относительно U и V.

Проверяем возможность деления на U и V.
Делим на $U^2(V^2)$
$AU^2+BUV+CV^2=0$ делим на $U^2(U!=0)$, получаем
$A+\frac{BV}{U}+\frac{CV^2}{U^2}=0$
Пусть $\frac{V}{U}=y$, тогда $\frac{V^2}{U^2}=y^2$, получаем ур-ие:
$A+By+Cy^2=0$
Обратная замена
Задачи на однородные уравнения
1) $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$

Ответ: $1; -1; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3};$

2) $2(x-1)^4 - 5(x^2-3x+2)^2 + 2(x-2)^4 = 0$

Ответ: $3+\sqrt{2}; 3-\sqrt{2}; +\sqrt{2}; -\sqrt{2};$

10. Теорема Безу и деление в столбик многочленов

Формулировка:

При делении многочлена n-ой степени относительно x, расположенного по убывающим степения x, на двучлен (x-a) остаток от деления равени значению делимого при x=a

Доказательство:

Поделим многочлен P(x) на (x-a), получим P(x)=(x-a)Q(x)+R(x), но R(x) имеет степень меньше многочлена (x-a) в силу того, что R(x) - остаток. (иначе кусок R(x) можно было бы включить в Q(x). А значит R(x) - просто число. Подставляем x=a в формулу P(x)=(x-a)Q(x)+R(x), получаем P(a)=(a-a)Q(x)+R=R, теорема доказана

Задача 1

Найти остаток от деления $x^3 + 5x^2 - 6x - 6 = 0$ на двучлен (x-2)

а) уголком

б) по теореме Безу

Следствия из теоремы Безу

I. Если многочлен делится без остатка на (x-a), то a-корень этого многочлена

II. Если a-корень многочлена, то он обязательно делится без остатка на (x-a)

Задача 2

Используя Следствие II из теоремы Безу решить следующие задачи (разложить на множители) ИЗ ПЕРВОГО ЛИСТКА

1) $(x^2 + 2xy + y^2)$

2) $(x^2 - 2xy + y^2)$

3) $(x^2 - y^2)$

4) $(x^3 - y^3)$

5) $(x^3 + y^3)$

6) $(x^5 - y^5)$

7) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

11. Рациональные корни многочлена

Формулировка

В многочлене вида $A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1x^1 + A_0 = 0, A_n! = 0$

Рациональные корни следует искать только среди чисел вида + или - $\frac{B_0}{B_n}$, где B_0 - делитель A_0 и B_n - делитель A_n

Доказательство

Лемма 1

Если приведенное уравнение $x^n + k_{n-1}x^{n-1} + ... + k_1x^1 + k_0 = 0$ имеет целый корень, то он обязательно будет делителем свободного члена k_n

Лемма 2

Приведенное уравнение $x^n + k_{n-1}x^{n-1} + ... + k_1x^1 + k_0 = 0$ не может иметь ни одного дробного корня.

Задача 1

Найти рациональные корни многочленов

1) $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2};$

2) $x^3 - 3x - 2 = 0$

Ответ: $-1; 2;$

Задача 2

Решить уравнения УГОЛКОМ

1) $x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0$

Ответ: $-3; 2; 5; -4;$

2) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$

Ответ: $1; 2;$

3) $x^4 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

12. Схема Горнера [нахождение остатка от деления многочлена P(x) на (x-a) без самого деления)]

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

13. Деление на x^2

1) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

Ответ: $\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{-3+\sqrt{7}}{2}; \frac{-3-\sqrt{7}}{2};$

2) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

Ответ: $-4; -6; \frac{-15-\sqrt{129}}{2}; \frac{-15+\sqrt{129}}{2};$

14. Обобщённая Теорема Виетта

15. Замена

1) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$

Ответ: $3; 3 + 2\sqrt{5}; 3 - 2\sqrt{5};$

2) $(x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$

3) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$

4) $(x^2 - 3x)^2 - 14x^2 + 42x + 40 = 0$

16. Сдвиг оси

$(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{21}}{6}; \frac{-5-\sqrt{21}}{6};$

17. Уравнение с параметрами

$x^4 - 3x^2 + 2(a-1)x + 2a - a^2 = 0$

18. Неполная замена аргументов

$(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0$

Ответ: $1; \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2};$

19. Сворачивание биномиальных формул

$x^5 - 35x^4 + 490x^3 - 3430x^2 + 12005x - 16807 = 0$

Ответ: $7;$

20. Нахождение иррациональных корней с допущениями

$3x^3 + 5x^2 - 9x - 2 = 0$

21. Тригонометрическая подстановка: сколько корней имеет уравнение на отрезке по x: [0;1]

$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$

Ответ: 4 корня;

22. Уравнения с иррациональными коэффициентами

$2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} = 0$

23. Использование Бинома Ньютона

1) $(x+2)^3 + x^2 = 28$

Ответ: 1;

2) $x^4 + (x-1)^4 = 17$

Ответ: $-1; 2$;

24. Подстановка среднего арифметического

$(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$

Ответ: $-1; -3$;

25. Подстановка среднего арифметического и доказательство о несуществовании корней

$x^5 + (x-2)^5 = 32$

Ответ: 2;

26. Выделение целой части

$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$

Ответ: $0; -\frac{5}{2}$;

27. Использование МНК (метода неопределённых коэффициентов) для разбиения слагаемого

$\frac{x+6}{x-6}(\frac{x-4}{x+4})^2 + \frac{x-6}{x+6}(\frac{x+9}{x-9})^2 = 2 * \frac{x^2+36}{x^2-36}$

Ответ: $0; \frac{6+\sqrt{936}}{5}; \frac{6-\sqrt{936}}{5}$;