

# КВАДРАТ СУММЫ

## Листок 2

### 1. Докажите равенство геометрически

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Подсказки:

1) рассмотрите квадрат со стороной  $a + b$  и посчитайте его площадь двумя способами: целиком и по частям

### 2. Докажите равенство геометрически

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

### 3. Найдите, чему равно $(a + b)^4 =$

Наблюдение:

Заметьте себе, что геометрический смысл равенства для четвёртой степени - это объём четырёхмерного куба. Там наше воображение отказывается нам помогать, а алгебраически по-прежнему можно посчитать!

### 4. Выпишите друг под другом разложения 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой и 5-ой степеней суммы двух слагаемых

1) Поймите закономерность поведения коэффициентов указанных разложений (Для этого ещё раз выпишите отдельно только коэффициенты указанных разложений).

2) Поймите, как ведут себя степени указанных разложений.

### 5. Используя обнаруженные закономерности выпишите разложения

1)  $(a + b)^6 = \dots$

2)  $(a - b)^7 = \dots$

Замечание:

разложения вида  $(a + b)^n = \dots$  называется БИНОМ НЬЮТОНА

### 6.(\*). Докажите, ПОЧЕМУ закономерности из пункта 4) РАБОТАЮТ

7.(\*). Подсчитать сумму биномиальных коэффициентов в разложении Бинома Ньютона (когда имеется в виду сумма в  $n$ -ой степени)

8.(\*). Докажите, что сумма коэффициентов на чётных местах равна сумме коэффициентов на нечётных местах

9. Докажите прямую теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы (самой длинной его стороны) равен сумме квадратов катетов

Указание: смотри! рис 1.

10. (\*) Докажите обратную теорему Пифагора: если квадрат гипотенузы равна сумме квадратов катетов, то треугольник прямоугольный

Замечание: Эта теорема нужна, чтобы строить прямой угол в природе. Например, достаточно взять 3 палки с длинами 3,4,5, тогда  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . И получится прямой угол.

**11. Целые числа, удовлетворяющие равенству  $x^2 + y^2 = z^2$  называются пифагоровы тройки**

Пифагоровы тройки можно получить из следующего равенства, подставляя различные  $m$  и  $n$

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

**12. (\*) (\*) (\*) Великая теорема Ферма**

а)  $x^3 + y^3 = z^3$ , не имеет решений в целых числах

б)  $x^4 + y^4 = z^4$ , не имеет решений в целых числах

в)  $x^n + y^n = z^n$ , где  $n > 2$  не имеет решений в целых числах

**13. Рождение иррациональных чисел**

Рассмотрите квадрат со стороной один. Найдите длину его диагонали. Докажите, что длина диагонали квадрата - число иррациональное (не представимое в виде  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  - целое,  $q$  - натуральное)

**14. (\*) Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении**

а)  $(\sqrt{2} + 3^{\frac{1}{4}})^{100} = \dots$

б)  $(\sqrt{2} + 3^{\frac{1}{3}})^{300} = \dots$

**15. (\*)**

Доказать, что значение выражения  $96^7 - 22^5 - 48^6$  кратно 10.

Решение 1

1) очевидно, что это число делится на 2, чуть сложнее доказать делимость на 5

2) рассмотрим числа из задания с точки зрения делимости на 5, будем иметь  $(5n + 1)^7 - (5m + 2)^5 - (5t + 3)^6 = (\dots + 1^7) - (\dots + 2^5) - (\dots + 3^6) = \dots + (1^7 - 2^5 - 3^6)$  При этом из разложения бинома следует, что ... Делится на 5, а скобка  $(1^7 + 2^5 + 3^6) = -760$  тоже делится на 5. Значит, и исходное число делится на 5.

Решение 2

Последние цифры чисел  $96^7 - > 6$ , т.к. любая степень 6 оканчивается на 6.  $22^5 - > 2$ , т.к.  $2^5 = 32$ ;  $48^6 - > 4$ , поэтому  $96^7 - 22^5 - 48^6 - > 6 - 2 - 4 = 0$