Распределительный закон для чисел

Листок 1

1.(!!!)Докажите, обоснуйте равенство

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

Подсказки:

1) подставьте числа вместо букв и поймите, что происходит с числами

Подсказка: Подставьте, например, (5+3)*7=5*7+3*7 и поймите смысл указанного равенства

2) поймите геометрический смысл доказываемого равенства.

Подсказка: Подсчитайте площадь прямоугольника со сторонами B+C и A двумя способами (целиком и по частям)

Примечание:

Указанное равенство лежит в основе ВСЕХ формул школьной алгебры и иначе ещё называется "правило раскрытия скобок". Можно ещё помнить это так: мама "a"кормит каждого сына "b"и "c"

2. Раскрыть скобки

1) $5x(x-2) = ...$

2) $(x^2 + 3xy)(2 + 7x + y) = ...$

3. Разложение на множители=приведение подобных

1) $7x - 3x = ...$ (этот вид разложения называется «приведение подобных слагаемых» , «подобными» называются одночлены с одинаковой буквенной частью)

2) $55x^{127}yz^2 - 8z^2yx^{127} + yz^2x^{127} = ...$

4. Привести подобные слагаемые

1) $2a + b - a + 10b + 1 = ...$

2) $7x - 2y = ...$ (если буквенная часть не совпадает, то складывать нельзя)

3) $5a^2b + 7 + x^2y - 8ba^2 + 10xy = ...$

5. Раскрытие скобок и приведение подобных

1) $(2a + b)(5b - 8a) = ...$

2) $(-2a + b - 2ab)(11a - 3ab) = ...$

6. Разложение на множители

1) $5x^2y + 2yx^2z = ...$

2) $8a^2b^3c + 3a^2cb^2 - b^3a^2c = ...$

3) $a^{-5} + a^{-3} = ...$

7. Метод группировки для разложения на множители

1) ax+2yb+xb+2ya=...

2) 14xy-15-21x+10y=...

3) 2az+z-4a+zb-2-2b=...

8.(!!!)Квадрат суммы и разности (разложить на множители методом группировки)

1) $x^2 + 2xy + y^2 = ... = (x + y)^2$

2) $x^2 - 2xy + y^2 = ... = (x - y)^2$

3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = ... = (a + b + c)^2$

9. Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для разложения на множители: надо прибавить и отнять одно и то же искуственно придуманное слагаемое, чтобы с ними возможно было проделать обычный метод группировки

1)(!!!)$x^2 - y^2 = ... = (x-y)(x+y)$ (Разность квадратов)

2)(!!!)$x^3 - y^3 = ... = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ (Разность кубов)

3)(!!!)$x^3 + y^3 = ... = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ (Сумма кубов)

4)(*)$x^5 - y^5 = ... = (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$ (Разность пятых степеней)

10. Метод группировки с добавлением фиктивных (виртуальных) слагаемых для СУММ КВАДРАТОВ

1)Докажите, что произведение суммы 2-х квадратов на сумму 2-х квадратов есть снова сумма 2-х квадратов, т.е.

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2$$

например, вот так:

$$(17^2+3^2)(8^2+11^2) = 103^2 + 211^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2 + 2*a*b + b^2 = (a+b)^2$$

2)(*)Докажите, что произведение суммы 4-х квадратов на сумму 4-х квадратов есть снова сумма 4-х квадратов, т.е.

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+p^2) = (?_1)^2 + (?_2)^2 + (?_3)^2 + (?_4)^2$$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd = (a+b+c+d)^2$$

Решение

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = (a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2 + (a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2 + (a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2 + (a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2$

3)(**)Докажите, что произведение суммы 8-и квадратов на сумму 8-и квадратов есть снова сумма 8-и квадратов, т.е.

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+u^2+t^2+s^2)(x^2+y^2+z^2+p^2+k^2+j^2+n^2+m^2) = (?_1)^2+(?_2)^2+(?_3)^2+(?_4)^2+(?_5)^2+(?_6)^2+(?_7)^2+(?_8)^2$

Подсказка: квадраты конструировать с помощью формул

$$(a+b+c+d+e+f+g+h)^2 = ...$$

Решение

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2+b_7^2+b_8^2) = (a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4-a_5b_5-a_6b_6-a_7b_7-a_8b_8)^2 + (a_2b_1+a_1b_2+a_4b_3-a_3b_4+a_6b_5-a_5b_6-a_8b_7+a_7b_8)^2 + (a_3b_1-a_4b_2+a_1b_3+a_2b_4+a_7b_5+a_8b_6-$

$a_5b_7 - a_6b_8)^2 + (a_4b_1 + a_3b_2 - a_2b_3 + a_1b_4 + a_8b_5 - a_7b_6 + a_6b_7 - a_5b_8)^2 + (a_5b_1 - a_6b_2 - a_7b_3 - a_8b_4 + a_1b_5 + a_2b_6 + a_3b_7 + a_4b_8)^2 + (a_6b_1 + a_5b_2 - a_8b_3 + a_7b_4 - a_2b_5 + a_1b_6 - a_4b_7 + a_3b_8)^2 + (a_7b_1 + a_8b_2 + a_5b_3 - a_6b_4 - a_3b_5 + a_4b_6 + a_1b_7 - a_2b_8)^2 + (a_8b_1 - a_7b_2 + a_6b_3 + a_5b_4 - a_4b_5 - a_3b_6 + a_2b_7 + a_1b_8)^2$

Примечание 1:

Формулы из задачи 10 можно доказать легче, чем с помошью группировки - с помощью гиперкомплексных чисел. Случай 2-х квадратов - комплексные числа, 4-х - кватернионы, 8-и - октавы.

Примечание 2:

Для 16-и квадратов неверно: теорема Фробениуса

11. Куб суммы и разности

1)(!!!) $x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3 = ...$

2)(!!!) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = ...$

12. Некоторые более сложные примеры

Разложить на множители

1)(*) $x^4 + 4 = ...$

2)(*) $2bc + a^2 - b^2 - c^2 = ...$

3)(*) $x^4 - 21x^2 + 4 = ...$

4)(**) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = ...$

5)(*) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = ...$

6)(*) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = ...$

7)(*) $a^4 - 2a^3 + a^2 - 1 = ...$

8)(*) $c^8 - c^4 - 2c^2 - 1 = ...$

9)(*) $8x^3 + y^3 + 6y^2 + 12y + 8 = ...$

13. Волшебный автомат

В четырёх ячейках памяти игрального автомата записаны числа a, b, c, d. Автомат может сложить или вычесть два числа (бесплатно) или перемножить их (за 1 рубль); результат он записывает в новую ячейку. Может ли игрок, потратив всего три рубля, добиться того, что каких-то трёх ячейках будут записаны числа 2(ab+cd), 2(ac+bd) и 2(ad+bc)? (Исходные числа игроку неизвестны).

Решение

1) сначала вычислим платно (a+b)(c+d)=ac+bd+ad+bc

2) затем вычислим платно (a-b)(c-d)=ac+bd-ad-bc

3) складываем 1)+2)=2(ac+bd) - одно нашли

4) вычитаем 1)-2)=2(ad+bc) - второе нашли

5) и наконец вычисляем платно (a+c)(b+d)=ab+(ad+cb)+cd

6) вычитаем 5)-1)=ab+cd+(ad+cb)-[ac+bd+(ad+bc)]=ab+cd - (ac+bd)

7) вычитаем 5)+2)=ab+cd+(ad+cb) + [ac+bd-ad-bc]=ab+cd + ac+bd

8) складываем 6)+7)=2(ab+cd) - третье нашли

ЗАМЕЧАНИЕ: Нельзя разложить на множители выражения следующего вида

1) $a + b$

2) $a - b$

3) $a^2 + b^2$ (сумму квадратов и вообще сумму чётных степеней)

4) $a^2 + ab + b^2$ (неполный квадрат суммы)

5) $a^2 - ab + b^2$ (неполный квадрат разности)
6) $a^2 + b^3$