Шахматная раскраска

Задача 21.1. На черной клетке шахматной доски стоит хромой король, который может за один ход переместиться на соседнюю клетку по горизонтали или вертикали (но не может ходить по диагонали, как это делает обычный король). На клетке какого цвета окажется король через 33 хода?

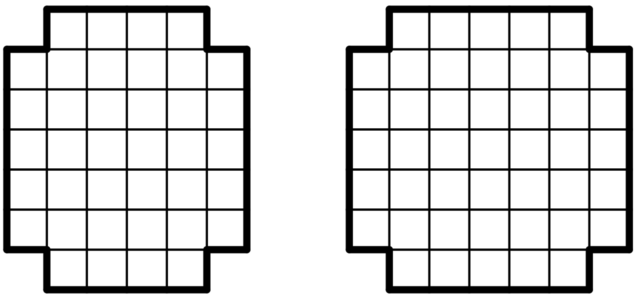
Задача 21.2. По шахматной доске ползает улитка. За минуту она переползает из одной клетки на соседнюю с ней по стороне клетку. Спустя некоторое время улитка приползла вновь в ту клетку, где была первоначально. Докажите, что за это время прошло четное число минут.

Задача 21.3. На шахматной доске стоит конь. Может ли он через **а)** 4; **б)** 5; **в)** 2013 ходов вернуться на исходное поле?

Задача 21.4. Может ли конь перейти из одного угла шахматной доски в противоположный угол (по диагонали), побывав на каждой клетке ровно один раз?

Задача 21.5. Из шахматной доски выпилили одно поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?

Задача 21.6. Можно ли обойти каждую из досок, изображенных на рисунке, побывав на каждой клетке ровно один раз? (Двигаться можно только на соседнюю по стороне клетку, начало и конец пути могут быть где угодно).



Задача 21.7. Замок имеет форму прямоугольника размером 5×7 клеток. Каждая клетка, кроме центральной — комната замка, а в центральной расположен бассейн. В каждой стене — стороне клетки есть дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Задача 21.8. **а)** Разрежьте шахматную доску на плитки размером 1×2. **б)** Разрежьте шахматную доску без левой нижней и левой верхней угловых клеток на плитки 1×2. **в)** Можно ли разрезать шахматную доску без левой нижней и правой верхней угловых клеток на плитки 1×2?

Задача 21.9. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент времени каждый из жуков переполз на соседнюю по горизонтали или вертикали клетку. Обязательно ли после этого будут пустые клетки?

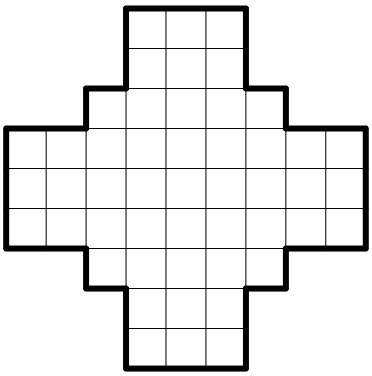
Задача 21.10. Тридцать пять хулиганов вышли на демонстрацию с шариками и построились в колонну 5×7. По команде каждый проткнул иголкой шарик своего соседа. Какое наименьшее число целых шариков могло при этом остаться?

Домашнее задание.

Задача 21.11. Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки $a1$ (левый нижний угол), закончив в клетке $h8$ (правый верхний угол) и на каждой клетке доски побывав ровно один раз?

Задача 21.12. Фигура «верблюд» ходит по шахматной доске ходом типа $(1, 3)$ (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

Задача 21.13. **а)** Обойдите доску, изображенную на рисунке, побывав на каждой клетке ровно один раз. (Двигаться можно только на соседнюю по стороне клетку, начало и конец пути могут быть где угодно). **б)** Можно ли совершить такой обход, если начало маршрута будет в самой правой клетке верхней горизонтали?



Задача 21.14. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа так, как показано на первом рисунке. Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, либо вычитать одно и то же число. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на втором рисунке? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

В следующую субботу, 7 марта, занятий кружка не будет.

Дополнительные задачи.

Задача Д21.1. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

Задача Д21.2. По кругу расставлены числа 1, 0, 1, 0, 0, 0 по часовой стрелке. Разрешается прибавить по единице любой паре соседних чисел. Можно ли с помощью такой операции сделать все числа равными?

Задача Д21.3. 10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу — синие. Разрешены две операции: а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд; б) перевернуть четыре фишки, расположенные так: $\times\times 0 \times\times$ ($\times$ — фишка, входящая в четвёрку, 0 — не входящая). Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?