Множества и операции над ними

Так уж сложилось, что любому вновь появляющемуся математическому понятию обязательно дают определение. Делают это не только в силу сложившихся в математике традиций и стремлению к точности и строгости во всем, но и для того, чтобы разные люди одним словом обозначали в своих рассуждениях одно и то же. Однако можно вспомнить, что это применимо отнюдь не ко всем математическим понятиям. Так, в геометрии понятия «точка» и «прямая» никак не определяются. Вместо этого пытаются описать их свойства вроде «прямая состоит из точек», «бесконечно простирается в обе стороны» и т.п., чтобы придти к единообразному их восприятию. Также в математике обстоят дела и с понятием «множество», которое используется безо всякого определения.

Причина этого следующая: для определения любого понятия необходимо указать, частью какого другого более общего понятия оно является, использовать в определении какие-то другие понятия. Но такое использование не может продолжаться бесконечно, оно либо должно в некоторый момент остановиться на неопределяемых понятиях, смысл которых всем понятен и ни у кого не вызывает разногласий, либо пойдет по кругу, когда первое понятие определяется через второе, второе через третье, и так далее до тех пор, пока последнее понятие в этой цепочке не будет определено через первое. Последний способ является совершенно недопустимым, поэтому мы не будем пытаться определять понятие «множество», подменяя его словами «набор», «совокупность», «семейство» и т.п., которые настолько же расплывчаты и тоже определяются одно через другое, а будем просто использовать его далее, полагая интуитивно понятным и не требующим пояснений.

Любое **множество** состоит из **элементов**, при этом элементы могут быть любые: числа, фигуры, предметы, другие множества. В математике множества принято обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, а элементы часто обозначают маленькими латинскими буквами. Если x является элементом множества A, то пишут $x \in A$, что читается «x является элементом множества A» или «x принадлежит A». Для некоторых часто используемых множеств существуют специальные обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Однако для работы с другими множествами их нужно предварительно задать. Множество считается заданным, если про любой объект можно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Множество можно задать несколькими способами:

а) Перечислением всех элементов множества, в этом случае элементы принято перечислять в фигурных скобках. Через $\{a, b, c, d\}$ обозначают множество состоящее из элементов a, b, c, d, при этом порядок этих элементов не учитывается, а каждый элемент считается по одному разу. Записи $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1, 1, 2\}$ задают одно и то же множество, состоящее из трех элементов 1, 2, 3.

б) Перечислением некоторых элементов, позволяющих понять, какие еще элементы входят в это множество, например $\{1, 3, 5, \ldots, 99\}$ — все нечетные целые числа от 1 до 99.

в) Указанием характеристического свойства, т.е. такого свойства, что им обладают все элементы данного множества и только они. Запись $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\}$ читается как «множество чисел x таких, что x — натуральное и кратно 2» и задает множество всех натуральных четных чисел.

Также рассматривается **пустое множество**, которое не содержит ни одного элемента и обозначается $\varnothing$.

Определение 1.1. Говорят, что множество A является **подмножеством** множества B, если любой элемент множества A является элементом множества B. Обозначение: $A \subset B$. Считается, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Определение 1.2. Два множества A и B называются **равными**, если содержат одни и те же элементы. Обозначение: $A = B$. Другими словами, множества называются равными, если любой элемент первого множества является элементом второго множества, а любой элемент второго множества является элементом первого множества, т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 1.3. Пересечение $A \cap B$ множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат одновременно обоим множествам, т.е. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Определение 1.4. Объединение $A \cup B$ множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т.е. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Определение 1.5. Разность $A \setminus B$ множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B, т.е. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Определение 1.6. Симметрическая разность $A \triangle B$ множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B, т.е. $A \triangle B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)\}$.

Задачи

Задача 1.1(у). Закончить фразы: **а)** «Множество A не является подмножеством множества B, если…»; **б)** «Множество A не равно множеству B, если…».

Задача 1.2(у). Верно ли утверждение: «Множество A тогда и только тогда является подмножеством множества B, когда любой элемент, не принадлежащий B, не принадлежит A»?

Задача 1.3(у). **а)** Сколько подмножеств имеет множество, состоящее из шести элементов? **б)** Множество A содержит m элементов, его подмножество B содержит n элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B \subset C \subset A$?

Задача 1.4(у). Найдите число всех пар подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что первое из этих подмножеств содержится во втором.

Задача 1.5. Любые два жителя города либо дружат, либо враждуют между собой. При этом известно, что если A — друг B, а B — друг C, то A — также друг C, а также среди любых троих жителей хотя бы двое дружат между собой. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители города могут подружиться.

Задача 1.6. В школе в течение недели прошли олимпиады по математике, физике, химии, биолигии и информатике. Докажите, что из любых 11 школьников можно найти таких двух, что все олимпиады, которые посетил первый из них, посетил и второй.

Задача 1.7. Докажите, что можно выписать все подмножества множества из n элементов в таком порядке, чтобы каждое следующее получалось из предыдущего добавлением или удалением одного элемента.

Задача 1.8. Имеется набор из 10 гирь, каждая весит целое число граммов, и суммарный вес гирь меньше килограмма, а также чашечные весы. Докажите, что некоторые из этих гирь можно разложить на две чашки весов так, что они окажутся в равновесии.

Задача 1.9(у). Какое наибольшее число подмножеств можно выбрать в множестве из 10 элементов, если требуется, чтобы ни одно из них не было подмножеством другого?

Задача 1.10(у). Пусть A и B — множества точек, лежащих внутри двух пересекающихся кругов. Нарисуйте в этом случае множества точек $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$. Заполните таблицу

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$x \in A \setminus B$	$x \in A \triangle B$
$-$	$-$				
$-$	$+$				
$+$	$-$				
$+$	$+$				

Задача 1.11. Даны множества $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 8, 9\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **а)** Найдите $(A \cap B) \setminus C$ и $(A \cup B) \cap (B \cup C)$. **б)** Можно ли выразить множества $\{1, 2, 9\}$ и $\{6, 7, 8\}$ через A, B и C с помощью операций объединения, пересечения, разности и симметрической разности?

Задача 1.12(у). Про множества A, B и C известно следующее: $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $B \cap C = \{3, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Найдите множества A, B и C.

Задача 1.13(у). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, A и B — множества решений уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ соответственно. Выразите, если это возможно, с помощью множеств A и B, операций объединения, пересечения и разности множества решений следующих уравнений:

а) $f(x) \cdot g(x) = 0$;

б) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

в) $f(x) = g(x)$;

г) $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$.

Задача 1.14. Пусть $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$[1], $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Найдите $A \cap B$ и $B \setminus A$, т.е. запишите их в виде $\{\ldots \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Задача 1.15. Какие из следующих равенств являются верными:

а) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
в) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
д) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
е) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

Задача 1.16(у). Верны ли утверждения:

а) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$;
б) $A \cap C = B \cap C \Leftrightarrow A = B$;
в) $A \cup C = B \cup C \Leftrightarrow A = B$;
г) $A \setminus C = B \setminus C \Leftrightarrow A = B$;
д) $A \triangle C = B \triangle C \Leftrightarrow A = B$;
е) $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
ж) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

Задача 1.17. Упростите выражения:

а) $A \setminus (A \cap B)$;
б) $A \setminus (A \setminus B)$;
в) $A \cup (B \setminus A)$;
г) $A \triangle A$;
д) $A \triangle (B \triangle A)$.

Задача 1.18. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

Задача 1.19(у). **а)** Напишите формулу, выражающую $A \triangle B$ через операции $\cap, \cup, \setminus$. **б)** Можно ли выразить пересечение через разность и объединение? **в)** Можно ли выразить $A \setminus B$ через операции объединения и пересечения?

Задача 1.20(у). Пусть имеется выражение, содержащее переменные множеств и четыре вида операций: объединения, пересечения, разности и симметрической разности. Докажите, что его можно заменить на равное ему выражение, в котором будут операции только двух видов.

Задача 1.21. **а)** Сколько различных (не равных друг другу) выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью операций объединения, пересечения и разности, которые можно использовать любое число раз? Тот же вопрос для трех множеств и для n множеств. **б)** Тот же вопрос, если используются только операции объединения и пересечения.

Задача 1.22. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные множеств и операции объединения, пересечения и разности, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

Задача 1.23. Дано несколько множеств. На каждом шаге какие-то два из этих множеств заменяются на их симметрическую разность. Через несколько шагов остается одно множество. Докажите, что это множество не зависит от последовательности, в которой выполняются шаги.

Задача 1.24. Докажите, что для любых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$

а) $A_1 \triangle A_n \subset (A_1 \triangle A_2) \cup (A_2 \triangle A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \triangle A_n)$;
б) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$.

Критерии оценок

«5»	«4»	«3»	«2»
18	14	10	6

[1] точнее было бы написать $A = \{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$